

# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR de 3<sup>e</sup> CYCLE en PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Jacques PIGEON

---

## SUJET

ÉTUDE DU SECOND TERME DE LA SÉRIE

DE BORN POUR LES RÉACTIONS DE STRIPPING

APPLICATION A LA RÉACTION  $^{28}\text{Si} (d,p) ^{29}\text{Si}$

---

Soutenue le 23 Octobre 1964

devant la Commission d'Examen :

MM. A SARAZIN

J LAFOUCRIERE

E. EL-BAZ

Président

} Examineurs



# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR de 3<sup>e</sup> CYCLE en PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Jacques PIGEON

---

## SUJET

ÉTUDE DU SECOND TERME DE LA SÉRIE

DE BORN POUR LES RÉACTIONS DE STRIPPING

APPLICATION A LA RÉACTION  $^{28}\text{Si} (d, p) ^{29}\text{Si}$

---

Soutenue le 23 Octobre 1964

devant la Commission d'Examen :

MM. A SARAZIN

J LAFOUCRIERE

E. EL-BAZ

Président

}  
Examineurs



# UNIVERSITE DE LYON

---

## FACULTE DES SCIENCES

---

### Doyens Honoraires

MM. LONGCHAMBON  
DOUIN  
MOUSSA  
GAUTHIER Henri

### Professeurs Honoraires

MM. LOCQUIN  
de LAREMBERGUE  
SOLLAUD  
MENTZER  
MOUSSA  
JAFFARD  
DOUIN  
EYRAUD Henri  
DEJARDIN  
VIRET



### Doyen

M. BRACONNIER

### Assesseurs

MM. MESNARD  
BOIDIN

## Professeurs

MM. LONGCHAMBON

PRETTRE

COURTY

KUHNER

MALECOT

PARIS

AUMERAS

COLONGE

JANIN

FLANDRIN

BERNARD

DUFAY Jean

NIGON

GAUTHIER Henri

WAUTIER

CHOPIN

CUEILLERON

BRACONNIER

EYRAUD Charles

SARAZIN

BOIDIN

PERES

MESNARD

GRANDMONTAGNE

BOUTILLIER

LAFOUCRIERE

DREUX

TEICHNER

PAVANS de CECCATTY

MERLIN

DUFAY Maurice

FRAISSE

LUBET

PHILBERT

COHEN-ADDAD

DAVID Louis

CHANEL

MAURY

DEPRAZ

GAUTHIER Jean

Minéralogie

Chimie industrielle

Chimie-Physique

Botanique

Mécanique rationnelle et appliquée

Chimie minérale

Chimie

Chimie organique

Physique générale

Géologie appliquée

Physique industrielle

Astronomie

Zoologie expérimentale

Géologie générale

Zoologie

Chimie biologique

Chimie

Calcul différentiel et intégral

Chimie-Physique appliquée

Physique nucléaire

Microbiologie et Mycologie

Physiologie

Electronique

Physique

Minéralogie

Physique nucléaire

Chimie organique

Chimie industrielle

Zoologie

Chimie analytique

Physique de l'Atmosphère

Mathématiques

Physiologie

Physique nucléaire

Chimie

Géologie générale

Psychophysiologie

Méthodes Mathématiques de la physique

Physique nucléaire

Chimie

### Professeurs sans Chaire

|                |                                 |
|----------------|---------------------------------|
| MM. GAUME      | Physique                        |
| FERON          | Mathématiques                   |
| LAFORGUE       | Physique                        |
| LEGAY          | Zoologie expérimentale S.P.C.N. |
| UZAN           | Physique S.P.C.N.               |
| CHENEVOY       | Géologie appliquée              |
| GINET          | Zoologie                        |
| ASCH           | Physique                        |
| MICHEL Pierre  | Minéralogie                     |
| DUCET          | Biologie végétale               |
| Mlle MAITROT   | Physique                        |
| MM. GEVIN      | Géologie générale               |
| PONASSE        | Mathématiques                   |
| d'INCAN        | Physique                        |
| LEFEBVRE       | Mathématiques                   |
| PERNET         | Mathématiques                   |
| CHERY          | Physique                        |
| BERGEON        | Physique C.S.U.                 |
| Mlle GAUTHERON | Chimie biologique               |

### Maîtres de Conférences

|                 |                       |
|-----------------|-----------------------|
| Mme ERICSON     | Physique générale     |
| MM. MARTEL      | Mécanique             |
| MATHIEU         | Mécanique des Fluides |
| ERBEIA          | Physique              |
| DESCOTES        | Chimie organique      |
| PICARD Philippe | Mathématiques         |
| LEMOIGNE        | Botanique             |
| DEMARCO         | Géologie générale     |
| MICHEL Georges  | Biochimie             |
| LEBRETON        | Biologie végétale     |
| DAVID Jean      | Biologie animale      |
| TOUSSET         | Chimie propédeutique  |
| FEUVRAIS        | Physique Electricité  |
| PICARD Claude   | Mathématiques         |
| SCHMITT         | Physique M.P.C.       |

Maître de Conférences Adjoint

M. PIERRON

Chimie

Conseiller Administratif

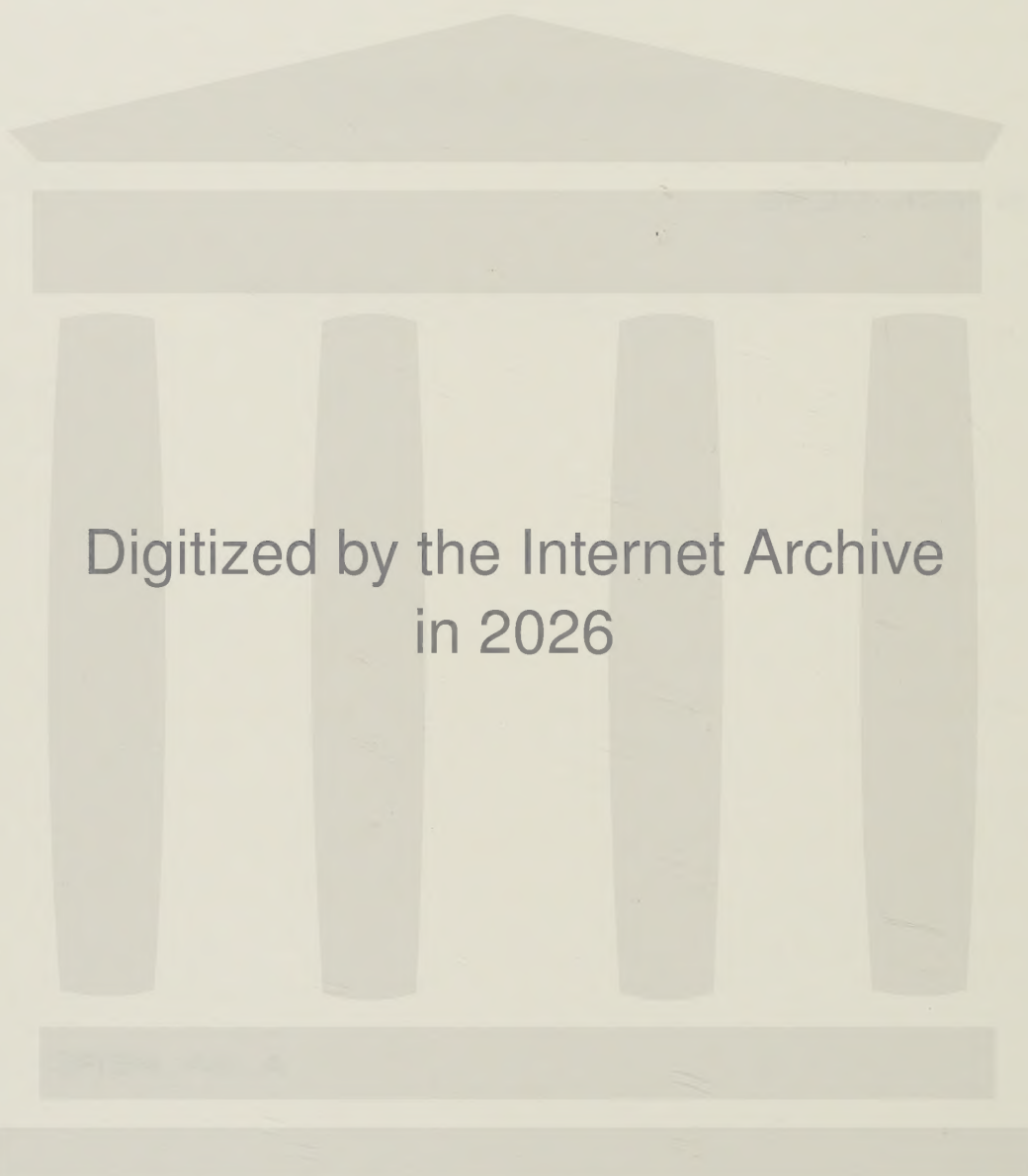
M. BURNET

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

A MON PERE

A MA MERE



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41553420\\_0019](https://archive.org/details/IA41553420_0019)

Je tiens à assurer Monsieur le Professeur A.SARAZIN, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, de ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et l'appui que j'ai toujours trouvé auprès de lui.

Que Monsieur le Professeur J.LAFOUCRIERE, qui m'a proposé le sujet de cette thèse, veuille bien trouver ici mes chaleureux remerciements pour les conseils qu'il m'a prodigués et la confiance qu'il m'a témoignée, tout au cours de la présente étude.

Je remercie Monsieur E.EL-BAZ de l'aide efficace qu'il n'a cessé de m'apporter.

Je ne saurais oublier les membres du personnel de l'Institut et leur suis reconnaissant de la sympathique ambiance de travail qu'ils ont su créer.

Je dois beaucoup à mes camarades d'études et tout spécialement à J.N.MASSOT, J. DELORME, C. MAGUIN, qu'ils trouvent ici un témoignage de mon amitié.



## INTRODUCTION

---

Une théorie complète des réactions nucléaires implique la résolution d'un problème à plusieurs corps et nécessite une connaissance profonde des forces nucléaires. Cette connaissance étant inaccessible pour l'instant, les théoriciens ont établi des modèles simples de réactions susceptibles d'interpréter certains aspects de la situation expérimentale ; c'est le cas des modèles dits du noyau composé et de l'interaction directe.

Dans le modèle du noyau composé, la particule incidente est absorbée par le noyau formant un état métastable. On admet que dans cet état intermédiaire, la particule incidente a perdu son individualité en subissant l'influence de tous les nucléons du noyau. Ce fait est important car il indique une décomposition du noyau composé selon un processus totalement indépendant de son mode de formation. Cette théorie rend bien compte, par exemple, des pics de résonance présentés à basse énergie par les courbes de section efficace totale. Ces pics, correspondant aux différents niveaux du noyau composé peuvent être analysés par la formule de BREIT et WIGNER à un niveau.

À énergie plus grande, les réactions nucléaires ne font pas intervenir un état bien défini. Habituellement plusieurs états intermédiaires contribuent à la réaction et leurs effets peuvent être inclus dans diverses approximations modifiant la formule de BREIT et WIGNER à un niveau. Malheureusement, la complexité alors introduite rend ce genre de description vite impraticable ce qui conduit à utiliser une analyse statistique du problème.

En conclusion, les succès du noyau composé sont surtout importants dans les zones d'énergie où les niveaux peu nombreux sont bien séparés et peuvent être caractérisés individuellement.

Les hypothèses de l'interaction directe sont totalement différentes. Cette théorie, en effet, ne fait pas intervenir de stade intermédiaire dans l'évolution du processus. Elle suppose d'autre part des actions individuelles entre nucléons ou groupes de nucléons : la particule incidente n'interagit qu'avec un très petit nombre de nucléons du noyau-cible. Ce modèle, particulièrement bien adapté à la description des réactions de "stripping", de "Knock-out" et de "Pick-up", ne fait intervenir dans chacun de ces cas que quelques degrés de liberté et permet de retrouver aisément l'émission préférentielle vers l'avant.

La description théorique de l'interaction directe est obtenue en calculant la quantité

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \psi_\alpha^+ \rangle$$

appelée amplitude de transition (1). (La signification des quantités  $|\psi_\alpha^+\rangle$

$|\phi_{i_2}\rangle$ ,  $E$ ,  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  sera donnée dans le chapitre premier).

$|\psi_\alpha^+\rangle$  vérifie l'équation intégrale

$$|\psi_\alpha^+\rangle = |\phi_{i_1}\rangle + \frac{1}{E - H_1 + i\varepsilon} V_\alpha |\psi_\alpha^+\rangle$$

On a donc, par itérations successives, le développement en série de Born.

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \phi_{i_1} \rangle + \langle \phi_{i_2} | V_\beta \frac{1}{E - H_1 + i\varepsilon} V_\alpha | \phi_{i_1} \rangle + \dots$$

Nous avons donc exprimé l'amplitude de transition sous forme d'une série.

Dans les théories les plus simples, on se contente du premier terme (approximation de BORN) et l'on associe une onde plane à chaque ensemble de conditions initiale et finale pour décrire le mouvement relatif des

constituants de la réaction. Cette théorie appliquée pour la première fois aux réactions de stripping par BUTLER est d'un intérêt considérable en spectroscopie nucléaire car elle permet d'évaluer très simplement les caractéristiques quantiques du modèle des couches. Pourtant cette théorie est très limitée dans sa simplicité même puisqu'elle ne peut expliquer que l'allure générale des courbes de distributions angulaires.

Des tentatives ont été faites pour améliorer cette situation. Nous citerons la thèse d'E. EL-BAZ (2) sur les réactions de stripping. Cet auteur opère en ajoutant une interaction complémentaire avec le noyau résiduel. Les succès de ce procédé sont cependant restreints car les calculs qu'il préconise ne sont simples que pour quelques noyaux particuliers.

La méthode des ondes distordues dite encore méthode D.W.B.A. (Distorted Wave Born Approximation) utilise également l'approximation de BORN. L'onde entrante, décrivant le mouvement relatif de la cible et du projectile est alors solution de l'équation de Schrödinger avec un potentiel optique (pouvant dépendre d'un couplage  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ ). Certains auteurs ont encore amélioré les résultats en distordant également l'onde de la voie de sortie par un potentiel complexe différent de celui de la voie d'entrée (3). A côté de ces procédés de caractère purement mathématique, il en existe d'autres d'aspect plus expérimental où les ondes entrantes et sortantes sont déterminées point par point par des expériences de diffusion élastique (4). Toutes ces façons d'opérer sont fructueuses, malheureusement, elles sont assez compliquées et onéreuses car elles nécessitent l'utilisation de calculateurs électroniques de grande puissance. De plus, elles ont l'inconvénient de ne pas donner une compréhension physique simple des phénomènes. Enfin, elles mettent en jeu un nombre relativement grand de paramètres.

Il faut donc remarquer que toutes ces tentatives, bien qu'orientées dans différentes directions, identifient l'amplitude de transition au premier terme de son développement. Elles lui imposent donc à priori, une convergence rapide et cela, à partir du premier terme. Ces questions de conver-

gence ont été abordées par W. KOHN (5), R. JOST et A. PAIS (6), H. DAVIES (7), J.E. RUSSEL (8). Tous ces auteurs ont étudié la série de BORN pour les diffusions élastiques non relativistes ( $V_{\alpha} = V_{\beta}$ ). En particulier, H. DAVIES a montré que pour ce type d'interaction la série converge si le potentiel d'interaction est à symétrie sphérique, stationnaire de profondeur et de portée finie et tel qu'il n'ait pas d'états liés pour les conditions énergétiques initiales. J.E. RUSSEL a repris ces travaux et a généralisé les résultats précédents en remarquant que la condition qui impose une symétrie sphérique au potentiel n'est pas indispensable.

Nous avons pensé, quant à nous, reprendre ce genre de problème mais cette fois pour une réaction nucléaire. Nous nous limiterons uniquement à une étude du deuxième terme, cette étude étant faite pour une réaction nucléaire particulière : la réaction  $^{28}\text{Si} (d, p) ^{29}\text{Si}$ . Nous ferons les calculs dans l'approximation des ondes planes en fixant certaines formes de potentiel d'interaction. Ainsi notre travail présentera un double aspect. Il consistera d'une part à trouver l'expression analytique du second terme, d'autre part, à étudier son ordre de grandeur et éventuellement son influence sur les courbes de distribution angulaire.

## CHAPITRE I

### L'AMPLITUDE DE TRANSITION

Nous reprendrons brièvement dans ce chapitre le calcul de l'amplitude de transition en utilisant le formalisme dépendant du temps basé sur l'emploi des opérateurs de transition en représentation d'interaction.

De par sa nature même, une réaction nucléaire est un processus évolutif. L'idéal serait donc de décrire une interaction nucléaire par un hamiltonien  $H(t)$  donnant en fonction du temps l'évolution du système. Malheureusement, la trop grande complexité des calculs et le peu de connaissance que nous avons des forces nucléaires nous interdisent un but aussi ambitieux.

La méthode préconisée dans cet exposé évite ces difficultés en introduisant la dépendance du temps dans le formalisme lui-même et en conservant un hamiltonien stationnaire. (1)

Considérons une réaction nucléaire du type :



où le système évolue de la voie d'entrée  $\alpha(x + X)$  vers une voie de sortie  $\beta(y + Y)$ . Désignons par  $H$  l'hamiltonien du système et écrivons le sous la forme :

$$H = H_{\alpha} + T_{\alpha} + V_{\alpha} = H_{\beta} + T_{\beta} + V_{\beta}$$

expression dans laquelle  $H_\alpha$  désigne l'hamiltonien interne des particules de la voie d'entrée,  $T_\alpha$  leur énergie cinétique et  $V_\alpha$  les termes responsables de l'interaction ( $H_\beta$ ,  $T_\beta$ ,  $V_\beta$  désignent les opérateurs correspondant de la voie de sortie).

Tout au long de cette étude, nous supposerons que les potentiels  $V_\alpha$  et  $V_\beta$  ne dépendent pas explicitement du temps et qu'ils décroissent à l'infini plus vite que  $\frac{1}{r}$  (9).

Dans ces conditions :

- à un instant très éloigné dans le passé ( $t = -\infty$ ) les particules de la voie d'entrée sont décrites par l'hamiltonien  $H_1 = H_\alpha + T_\alpha$ .
- au temps  $t = 0$  le système est décrit par  $H$ .
- à un instant très éloigné dans le futur ( $t = +\infty$ ) les particules formées au cours de l'interaction sont décrites par  $H_2 = H_\beta + T_\beta$ .

Avant de commencer le calcul de l'amplitude de transition, précisons les notations utilisées.

Désignons par  $|\Psi_{i\alpha}\rangle$  et par  $|\Psi_{i\beta}\rangle$  les vecteurs propres de  $H_\alpha$  et de  $H_\beta$

$$\begin{cases} H_\alpha |\Psi_{i\alpha}\rangle = \epsilon_{i\alpha} |\Psi_{i\alpha}\rangle \\ H_\beta |\Psi_{i\beta}\rangle = \epsilon_{i\beta} |\Psi_{i\beta}\rangle \end{cases} \quad (1-1)$$

On suppose que  $H_\alpha$  et  $H_\beta$  sont hermitiques de sorte que les  $|\Psi_{i\alpha}\rangle$  et les  $|\Psi_{i\beta}\rangle$  forment des systèmes complets de vecteurs orthogonaux (17).

L'hamiltonien  $H_\alpha$  ne contient aucun terme d'interaction entre les constituants  $x$  et  $X$  puisque le potentiel  $V_\alpha$  les contient tous par hypothèse. Dans ces conditions  $|\Psi_{i\alpha}\rangle$  est égal au produit tensoriel des états propres  $|\Psi_{ix}\rangle$  et  $|\Psi_{iX}\rangle$  qui désignent respectivement les structures internes de  $x$  et de  $X$ .

$$|\Psi_{i\alpha}\rangle = |\Psi_{ix}\rangle \cdot |\Psi_{iX}\rangle$$

et par conséquent

$$\varepsilon_{i\alpha} = \varepsilon_{ix} + \varepsilon_{iy}$$

De la même manière on a pour la voie de sortie

$$|\psi_{i\beta}\rangle = |\psi_{iy}\rangle \cdot |\psi_{iz}\rangle$$

$$\varepsilon_{i\beta} = \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{iz}$$

Désignons par  $|\vec{K}_a\rangle$  et par  $|\vec{K}_b\rangle$  les vecteurs propres de  $T_\alpha$  et de  $T_\beta$  (termes purement cinétiques)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\alpha |\vec{K}_a\rangle = \frac{\hbar^2 K_a^2}{2M_\alpha} |\vec{K}_a\rangle \\ T_\beta |\vec{K}_b\rangle = \frac{\hbar^2 K_b^2}{2M_\beta} |\vec{K}_b\rangle \end{array} \right. \quad (1-2)$$

$\hbar \vec{K}_a$  désignant l'impulsion relative des particules dans la voie  $\alpha$  et  $M_\alpha$  la masse réduite de cette voie ( $\hbar \vec{K}_b$  et  $M_\beta$  ont la même signification physique dans la voie de sortie).

Désignons par  $|\phi_{i1}\rangle$  et par  $|\phi_{i2}\rangle$  les kets propres de  $H_1$  et de  $H_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 |\phi_{i1}\rangle = E_{i1} |\phi_{i1}\rangle \\ H_2 |\phi_{i2}\rangle = E_{i2} |\phi_{i2}\rangle \end{array} \right. \quad (1-3)$$

La conservation de l'énergie totale nous donne

$$E = E_{i1} = E_{i2} = \varepsilon_{i\alpha} + \frac{\hbar^2 K_a^2}{2M_\alpha} = \varepsilon_{i\beta} + \frac{\hbar^2 K_b^2}{2M_\beta} \quad (1-4)$$

Enfin, désignons par  $|\psi_\alpha^+\rangle$  ( $|\psi_\beta^-\rangle$ ) la solution stationnaire de  $H$  correspondant à l'énergie  $E$  ayant dans la voie d'entrée (de sortie) un comportement asymptotique en onde divergente (convergente).

$$\begin{cases} H |\Psi_{\alpha}^{+}\rangle = E |\Psi_{\alpha}^{+}\rangle \\ H |\Psi_{\beta}^{-}\rangle = E |\Psi_{\beta}^{-}\rangle \end{cases} \quad (1-5)$$

Avec le présent formalisme, le problème qui se pose pour décrire une réaction nucléaire est de savoir par quel opérateur doit être multipliée l'amplitude de l'onde entrante  $|\phi_{i1}\rangle$ , état propre de  $H_1$ , pour obtenir celle de l'onde sortante :  $|\phi_{i2}\rangle$  état propre de  $H_2$ .

La matrice  $S$  ci-dessous définie résoud le problème. On sait en effet que :

$$S = \langle \phi_{i2} | U_2(+\infty, 0) U_1(0, -\infty) | \phi_{i1} \rangle$$

$$S = \langle U_2(0, +\infty) | \phi_{i2} | U_1(0, -\infty) | \phi_{i1} \rangle$$

$U_1(0, -\infty)$  et  $U_2(+\infty, 0)$  prenant les formes connues.

$$U_1(0, -\infty) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \exp \frac{iH_1 t_0}{\hbar} \exp -\frac{iH_1 t_0}{\hbar}$$

$$U_2(+\infty, 0) = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \exp \frac{iH_2 t_0}{\hbar} \exp \frac{iH_2 t_0}{\hbar}$$

on montre que : (on pourra par exemple se référer aux travaux de GROSJEAN (16)).

$$\begin{cases} U_1(0, -\infty) |\phi_{i1}\rangle = |\Psi_{\alpha}^{+}\rangle \\ U_2(+\infty, 0) |\phi_{i2}\rangle = |\Psi_{\beta}^{-}\rangle \end{cases} \quad (1-6)$$

à condition que les états  $|\phi_{i1}\rangle$  et  $|\phi_{i2}\rangle$  soient considérés comme faisant partie d'un groupe d'onde. Il y a lieu de noter que cette dernière hypothèse-

se est tout à fait conforme à la situation expérimentale. En effet, les expériences de diffusion s'effectuent toujours avec des paquets d'onde puisque les faisceaux ne sont jamais parfaitement monochromatiques et sont limités en étendue et en durée. En fait, ce dernier point, indispensable du point de vue théorique, ne semble pas être primordial dans la pratique. Dans la suite, nous supposerons toujours que les états final et initial sont déterminés par une onde pure.

En tenant compte des relations (1.6) il vient :

$$S = \langle \psi_{\beta}^{-} | \psi_{\alpha}^{+} \rangle$$

expression que l'on écrit :

$$S = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2}$$

avec

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} | \psi_{\alpha}^{+} \rangle \quad (1-7)$$

Ce résultat fait intervenir le potentiel d'interaction  $V_{\beta}$  de la voie de sortie, c'est à dire qu'il préconise à priori le principe de l'interaction dans l'état final. Il faut remarquer toutefois que le formalisme n'impose pas ce type d'interaction et qu'il est possible d'obtenir une expression de l'amplitude de transition faisant intervenir les potentiels de la voie d'entrée.

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \psi_{\beta}^{-} | V_{\alpha} | \phi_{i_1} \rangle$$

On montre alors, par des considérations de flux, que la section efficace différentielle est, dans le cas où l'on ne tient compte d'aucune polarisation, reliée à  $T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2}$  par une relation du type :

$$(1,8) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\hat{i}_x \hat{i}_x} \sum \frac{M_{\alpha i_1} M_{\beta i_2}}{(2\pi \hbar^2)^2} \frac{K_{\beta i_2}}{K_{\alpha i_1}} \left| T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} \right|^2; \quad \hat{i} = \sqrt{2i+1}$$

la sommation étant effectuée sur les indices caractérisant les voies d'entrée et de sortie ;  $M_{\alpha i_2}$  et  $M_{\beta i_2}$  étant respectivement la masse réduite de la voie  $\alpha i_2$  et  $\beta i_2$

Reprenons la première expression de l'amplitude de transition :

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} | \psi_{\alpha}^+ \rangle$$

Tenons compte du fait que  $|\psi_{\alpha}^+\rangle$  vérifie l'équation intégrale

$$|\psi_{\alpha}^+\rangle = |\phi_{i_1}\rangle + \frac{1}{E - H_1 + i\epsilon} V_{\alpha} |\psi_{\alpha}^+\rangle$$

Nous obtenons par itérations successives, la série de BORN.

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} | \phi_{i_1} \rangle + \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} \frac{1}{E - H_1 + i\epsilon} V_{\alpha} | \phi_{i_1} \rangle + \dots$$

On voit sur cette équation que toute amplitude de transition d'énergie  $E$  de la voie  $\alpha$  vers la voie  $\beta$  peut être regardée comme l'élément de matrice d'un certain opérateur

$$T_{\alpha\beta} = V_{\beta} + V_{\beta} \frac{1}{E - H_1 + i\epsilon} V_{\alpha}$$

appelé opérateur de transition. Mais l'on doit remarquer que dans les cas des collisions de réarrangement ( $V_{\beta} \neq V_{\alpha}$ ) cet élément de matrice ne correspond pas à la définition de la représentation matricielle d'un opérateur puisqu'en général, les vecteurs  $|\phi_{i_1}\rangle$  et  $\langle \phi_{i_2}|$  ne sont pas orthogonaux. Toutefois, grâce d'une part à des découpages particuliers des potentiels, d'autre part à des hypothèses complémentaires relatives à la nature et à l'évolution du processus, on peut obtenir pour  $H_1$  et  $H_2$  des hamiltoniens tels que l'on ait des fonctions d'onde orthogonales dans la voie d'entrée et de sortie. C'est ce qu'a fait SUNAKAWA (10) pour quelques exemples types de collisions de réarrangement (collisions élastiques ou inélastiques,

processus d'ionisation, réaction de Pick-up ...etc..)

Reportons nous au développement en série de Born de l'amplitude de transition. Il s'écrit :

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = {}^1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} + {}^2T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} \quad (1-9)$$

avec

$$\begin{cases} {}^1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \phi_{i_1} \rangle \\ {}^2T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_\beta \frac{1}{E - H_1 + i\epsilon} V_\alpha | \phi_{i_1} \rangle \end{cases} \quad (1-10)$$

Nous nous sommes proposés d'étudier l'influence du deuxième terme de la série de BORN pour voir si réellement ce deuxième terme a sur les courbes de distribution angulaire une influence aussi petite que le laisseraient croire les résultats déjà obtenus par les méthodes habituelles. Nous ferons cette étude dans le cadre de certaines hypothèses simplificatrices, en particulier dans le cas de l'approximation des ondes planes.

Notre réaction de référence sera une réaction de stripping (Fig.1)

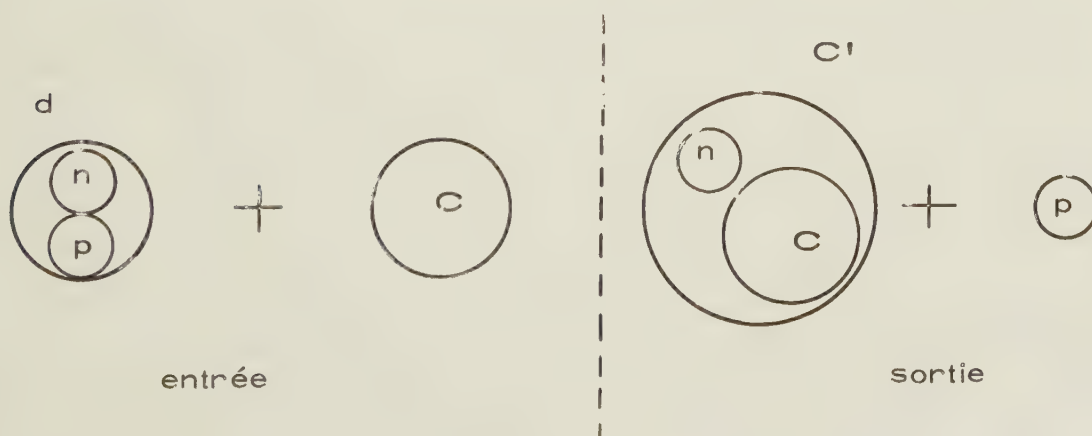


Figure 1

Dans le canal d'entrée nous avons un deuton  $d$  tombant avec une impulsion  $\vec{k}_d$  sur un noyau cible  $C$ . La réaction de stripping nous donne dans la voie de sortie un proton émergent d'impulsion  $\vec{k}_p$  et un noyau résiduel  $C'$  constitué du noyau  $C$  sur lequel un neutron  $n$  est venu se lier.

Nous prendrons comme noyau cible  $C$  un noyau du type coeur pur, c'est à dire un noyau ayant dans le cadre du modèle en couche, toutes ses couches complètement remplies. Nous savons en effet qu'un tel noyau est caractérisé par un moment angulaire total  $I_c = 0$ .

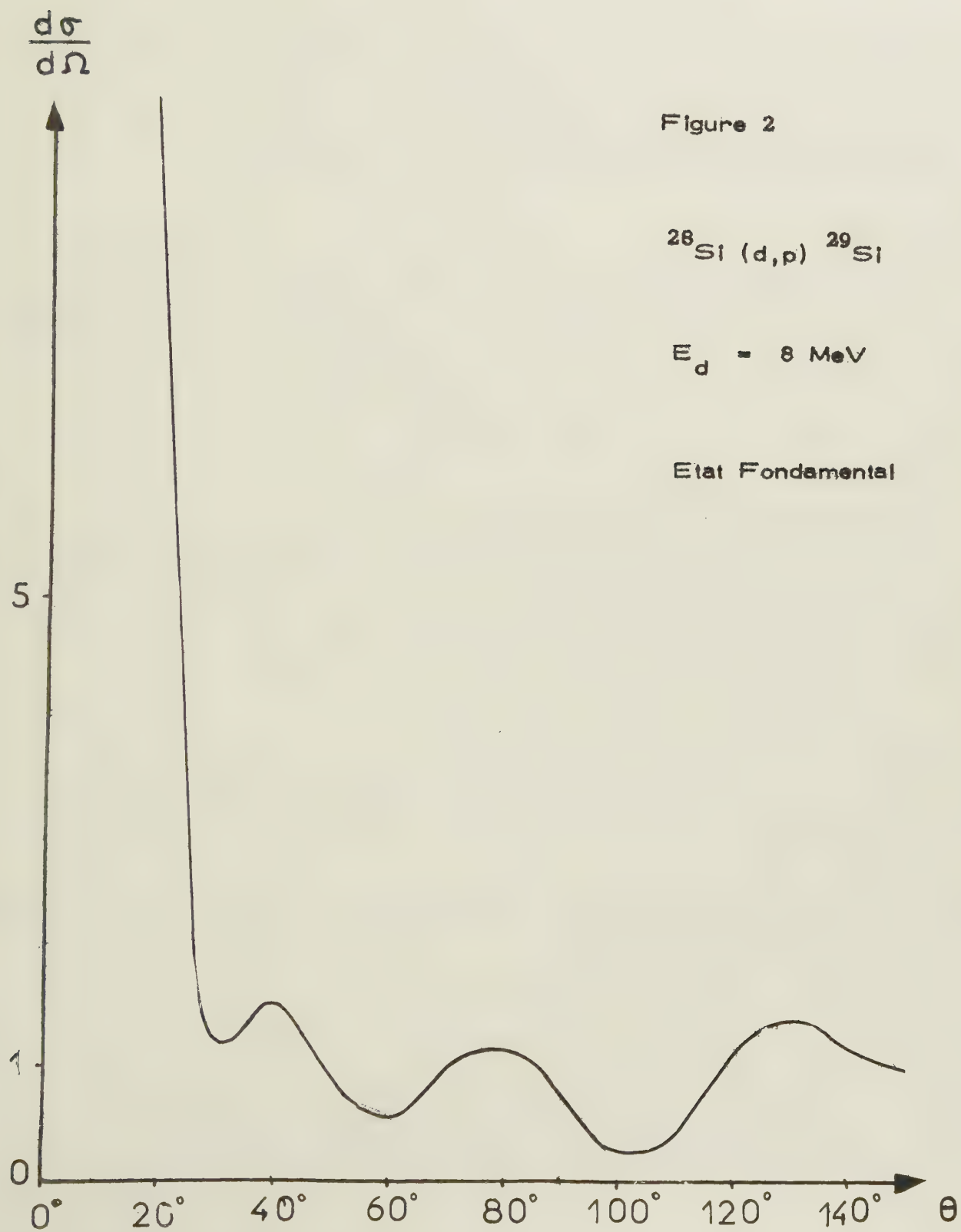
Le noyau de  $^{28}\text{Si}$  répond à ces critères. Nous envisageons donc la réaction :



et nous ferons son étude pour l'état fondamental.

Le choix de cette réaction présentera un autre avantage : le neutron est capturé sur une couche  $s$  et étant moins lié que ceux des sous-couches, nous n'aurons pas de terme d'échange à faire intervenir.

La courbe de distribution angulaire à 8 MeV de cette réaction due à KUEHNER et BROMLEY (11) est donnée (Figure 2).



## CHAPITRE II

## ETUDE DU PREMIER TERME

Nous venons de voir que la description d'une réaction nucléaire est soumise à la connaissance de l'amplitude de transition qui, au premier ordre, s'identifie au premier terme de son développement en série de Born :

$$T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \phi_{i_1} \rangle$$

Cherchons à l'exprimer en représentation  $\{\vec{r}\}$

Au cours de l'étude faite au chapitre I, nous avons décomposé le mouvement du système en un mouvement interne et en un mouvement relatif. Désignons donc par :

$$\left. \begin{array}{ll} \vec{r}_\alpha \text{ et } \vec{r}_\beta & \text{les coordonnées relatives} \\ \vec{\eta}_\alpha \text{ et } \vec{\eta}_\beta & \text{les coordonnées internes} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{de la voie d'entrée et} \\ \text{de la voie de sortie} \end{array}$$

et introduisons dans l'expression de  $T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2}$  les projecteurs sur les voies  $\alpha$  et  $\beta$  d'entrée et de sortie.

$$\int |\vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha\rangle \langle \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha| d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha = 1$$

$$\int |\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta\rangle \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta| d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta = 1$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}^1T_{\alpha i_2 \rightarrow \beta i_2} &= \int \langle \phi_{i_2} | \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta \rangle \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha | \phi_{i_1} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta \\ &= \int \phi_{i_2}^*(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \phi_{i_1}(\vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha) d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta \end{aligned}$$

Le potentiel  $V_\beta$  étant défini dans la voie de sortie, nous l'exprimerons dans cette voie en introduisant le projecteur :

$$\int |\vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta \rangle \langle \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta | d\vec{r}'_\beta d\vec{\eta}'_\beta = 1$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} {}^1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} &= \int \phi_{i_2}^*(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | V_\beta | \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta \rangle \langle \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \\ &\quad \phi_{i_1}(\vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha) d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta d\vec{r}'_\beta d\vec{\eta}'_\beta \end{aligned} \quad (II-1)$$

Or :

$$\langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | V_\beta | \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta \rangle = V_\beta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) \delta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta - \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta) \quad (II-2)$$

car le potentiel  $V_\beta$  que nous considérerons par la suite sera choisi diagonal en représentation  $\{\vec{r}\}$

En reportant ce résultat en représentation  $\{\vec{r}\}$  et en intégrant sur  $\vec{r}'_\beta$ ,  $\vec{\eta}'_\beta$  il reste :

$${}^1T_{\alpha i_2 \rightarrow \beta i_2} = \int \phi_{i_2}^*(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) V_\beta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \phi_{i_1}(\vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha) d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta \quad (II-3)$$

Pour évaluer le produit scalaire  $\langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle$  nous partions du fait que l'élément de matrice  $\langle \phi_{i2} | V_\beta | \phi_{i1} \rangle$  ne doit pas dépendre du système de coordonnées choisi pour l'expliciter.

En utilisant un système de coordonnées commun à la voie d'entrée et à la voie de sortie, nous obtenons en désignant par  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  les coordonnées des  $n$  nucléons du système.

$$1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \int \langle \phi_{i2} | \vec{r}_1 \dots \vec{r}_n \rangle \langle \vec{r}_1 \dots \vec{r}_n | V_\beta | \vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_n \rangle \langle \vec{r}'_1 \dots \vec{r}'_n | \phi_{i1} \rangle d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n d\vec{r}'_1 \dots d\vec{r}'_n$$

c'est à dire encore, en tenant compte des hypothèses que nous avons faites sur  $V_\beta$  :

$$1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \int \phi_{i2}^*(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n) V_\beta(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n) \phi_{i1}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n$$

Effectuons un changement d'origine et revenons aux variables internes et relatives des voies d'entrée et de sortie.

$$1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \int \phi_{i2}^*(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) V_\beta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) \phi_{i1}(\vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha) J d\vec{\tau}'$$

$J$  étant le jacobien de la transformation.

Cette transformation étant linéaire (définition de centre gravité, somme ou différence de vecteurs), le jacobien est égal à une constante et nous voyons que finalement

$$1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \int \phi_{i2}^*(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) V_\beta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta) \phi_{i1}(\vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha) d\vec{\tau}' \quad (II-4)$$

en prenant la constante égale à l'unité, ce qui n'a aucune importance puisque de toute façon nous l'aurions incluse dans le facteur de normalisation.

Reprenons l'expression de  $1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2}$  et réécrivons la en introduisant la notation :

$$\{V_\beta\} = V_\beta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta)$$

$$1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \int \phi_{i_2}^*(\vec{r}_\beta \vec{n}_\beta) \{V_\beta\} \phi_{i_1}(\vec{r}_\alpha \vec{n}_\alpha) d\vec{r}' \quad (II-5)$$

Considérons alors la fonction  $\phi_{i_1}(\vec{r}_\alpha \vec{n}_\alpha)$  de la voie d'entrée :

$$\phi_{i_1}(\vec{r}_\alpha \vec{n}_\alpha) = \langle \vec{r}_\alpha \vec{n}_\alpha | \phi_{i_1} \rangle$$

avec, comme nous l'avons vu :

$$|\phi_{i_1}\rangle = |\psi_{id}\rangle |\psi_{ic}\rangle |\vec{\kappa}_a\rangle$$

Rappelons que les indices  $i_1$ ,  $i_d$ ,  $i_c$ ,  $a$ , caractérisent les états quantiques que représente chacune des fonctions d'onde. En faisant apparaître le spin nucléaire  $I_x$  du noyau  $X$  et le nombre quantique magnétique correspondant  $M_x$  on peut poser :

$$a) \text{ pour le deuton : } |\psi_{id}\rangle = |\psi_{I_d, M_d}\rangle = |I_d M_d\rangle$$

$$b) \text{ pour le coeur : } |\psi_{ic}\rangle = |\psi_{I_c, M_c}\rangle = |I_c M_c\rangle$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$|\phi_{i_1}\rangle = |I_d M_d\rangle |I_c M_c\rangle |\vec{\kappa}_a\rangle$$

et par conséquent :

$$\langle \vec{r}_\alpha \vec{n}_\alpha | \phi_{i_1} \rangle = \langle \vec{r}_\alpha \vec{n}_\alpha | I_d M_d, I_c M_c, \vec{\kappa}_a \rangle$$

Parmi les variables internes  $\vec{n}_\alpha$  on peut distinguer les variables  $\vec{n}_\alpha^d$  et  $\vec{n}_\alpha^c$  traduisant respectivement la structure interne du deuton et du noyau  $c$ . En remarquant encore que les hamiltoniens  $H_d$  et  $H_c$  ne dépendent pas des variables relatives on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{r}_2 | \vec{r}_2 | \phi_{i_1} \rangle &= \langle \vec{r}_2^d | I_d M_d \rangle \langle \vec{r}_2^c | I_c M_c \rangle \langle \vec{r}_2 | \vec{K}_2 \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \psi_{I_d M_d}(\vec{r}_2^d) \psi_{I_c M_c}(\vec{r}_2^c) \exp(i \vec{K}_2 \cdot \vec{r}_2)
 \end{aligned}$$

La fonction  $\psi_{I_d M_d}(\vec{r}_2^d)$  décrit le mouvement des nucléons du deuton autour de leur centre de masse  $G_d$ .

$$\psi_{I_d M_d}(\vec{r}_2^d) = \psi_{I_d M_d}(\vec{r}_{n G_d}, \vec{r}_{p G_d})$$

Un changement d'origine (origine aux centres de gravité respectifs du neutron  $n$  ou du proton  $p$ ) diminue le nombre des variables.

$$\psi_{I_d M_d}(\vec{r}_2^d) = \psi_{I_d M_d}(\vec{r}_{p n}) = \langle \vec{r}_{p n} | I_d M_d \rangle \quad (II-6)$$

On trouverait de même :

$$\begin{aligned}
 \psi_{I_c M_c}(\vec{r}_2^c) &= \psi_{I_c M_c}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | I_c M_c \rangle \\
 \vec{K}_2(\vec{r}_2) &= \vec{K}_2(\vec{r}_{dc}) = \langle \vec{r}_{dc} | \vec{K}_2 \rangle
 \end{aligned} \quad (II-7)$$

$\vec{r}$  désignant la distance du  $a^{\text{ième}}$  nucléon au centre de gravité de l'ensemble et  $r_{dc}$  la distance du centre de masse  $G_d$  du deuton au centre de gravité  $G_c$  du noyau  $C$  (Voir figure 3).

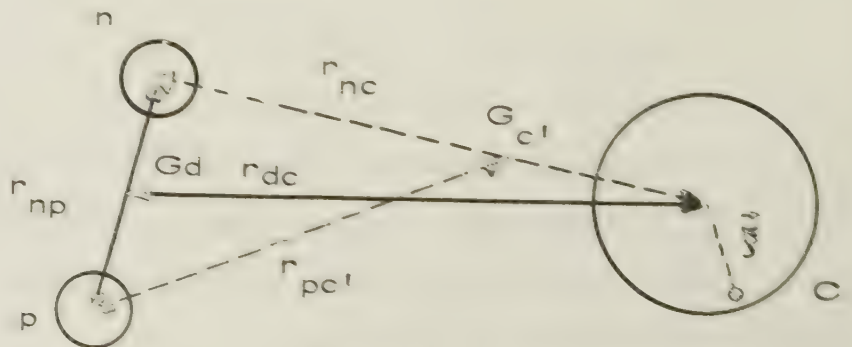


Figure 3

Dans le canal de sortie. Un raisonnement identique nous donne successivement :

$$\begin{aligned}\phi_{i_2}(\vec{r}_\beta, \vec{\eta}_\beta) &= \langle \vec{r}_\beta, \vec{\eta}_\beta | \phi_{i_2} \rangle \\ &= \langle \vec{r}_\beta, \vec{\eta}_\beta | I_c, M_c, S_p \sigma_p, \vec{K}_b \rangle\end{aligned}$$

Le proton n'ayant pas de structure interne, il vient :

$$\begin{aligned}\phi_{i_2}(\vec{r}_\beta, \vec{\eta}_\beta) &= \psi_{I_c, M_c}(\vec{\eta}_\beta) | S_p \sigma_p \rangle \vec{K}_b(\vec{r}_\beta) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \psi_{I_c, M_c}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) \exp(i \vec{K}_b \vec{r}_{pc}) | S_p \sigma_p \rangle\end{aligned}\quad (II-8)$$

où (figure 3)

$\vec{r}_{nc}$  désigne la distance du neutron de  $C'$  au centre de gravité de  $C$

$\vec{r}_{pc}$  la distance du proton au centre de masse de  $C'$

et où  $\vec{\xi}$  a la même signification que précédemment.

Finalement l'élément de matrice s'écrit :

$$\begin{aligned}1T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_{I_c, M_c}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) \exp(-i \vec{K}_b \vec{r}_{pc}) \langle S_p \sigma_p \rangle \{V_\beta\} \\ &\quad \psi_{I_d, M_d}(\vec{r}_{pn}) \psi_{I_c, M_c}(\vec{\xi}) \exp(i \vec{K}_a \vec{r}_{dc}) d\vec{\xi} d\vec{r}\end{aligned}\quad (II-9)$$

Dans cette expression figurent des fonctions telles que  $\psi_{I_c, M_c}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc})$

$\psi_{I_c, M_c}(\vec{\xi})$  très compliquées puisque, devant décrire le mouvement de tous les nucléons de  $C$  et de  $C'$ , elles font intervenir un grand nombre de variables. Pour lever ces difficultés, nous développerons ces fonctions sur une base de fonctions plus simples et nous affranchirons de la sommation sur

les variables internes  $\vec{\xi}$  en introduisant une largeur réduite  $\theta_{I_c}$ .

Dans la voie de sortie, le noyau  $C'$  possède un spin nucléaire  $\vec{I}_c$ , que nous décomposerons en  $\vec{I}_c + \vec{J}_n$  ou encore en  $\vec{I}_c + \vec{\ell}_n + \vec{S}_n$ ;  $\vec{I}_c$  étant le moment cinétique total du noyau  $C$ ,  $\vec{J}_n$  le moment cinétique total du neutron extérieur décomposable à son tour en une somme de son moment orbital  $\vec{\ell}_n$  avec son spin  $\vec{S}_n$  (figure 4).

Remarquons qu'en procédant de la sorte, nous supposons que l'état quantique du coeur n'est pas modifié au cours de la réaction nucléaire puisque nous lui attribuons le même moment cinétique total que dans la voie d'entrée; c'est une situation expérimentale qui semble vérifiée par des noyaux à couches complètes tels que  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{16}\text{O}$ .

Nous avons d'abord :

$$|I_c, M_c\rangle = \sum_{I_c' \mu_n} (I_c' \mu_n j_n \mu_n | I_c, M_c) |I_c' \mu_n\rangle |j_n \mu_n\rangle$$

puisque :

$$\vec{I}_c' = \vec{I}_c + \vec{J}_n$$

ensuite :

$$|j_n \mu_n\rangle = \sum_{m_n \sigma_n} (\ell_n m_n s_n \sigma_n | j_n \mu_n) |\ell_n m_n\rangle |s_n \sigma_n\rangle \text{ car } \vec{j}_n = \vec{\ell}_n + \vec{S}_n$$

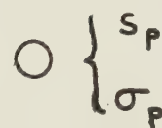
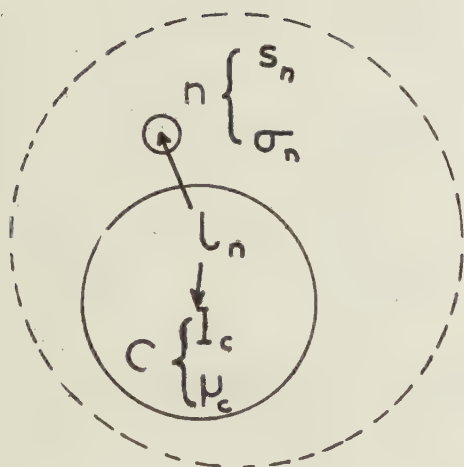
soit alors :

$$|I_c, M_c\rangle = \sum_{I_c' \mu_n m_n \sigma_n} (I_c' \mu_n j_n \mu_n | I_c, M_c) (\ell_n m_n s_n \sigma_n | j_n \mu_n).$$

$$|I_c' \mu_n\rangle | \ell_n m_n \rangle | s_n \sigma_n \rangle \quad (II-10)$$

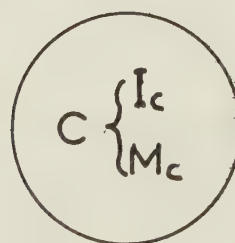
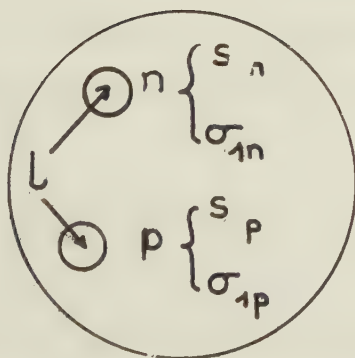
On décomposera de même le spin nucléaire  $\vec{I}_d$  du deuton sur les moments angulaires de ses constituants (figure 5). On décomposera  $\vec{I}_d$  en  $\vec{I}_d = \vec{J} + \vec{S}_p$  puis  $\vec{J}$  en  $\vec{J} = \vec{\ell} + \vec{S}_n$ ,  $\vec{\ell}$  étant le moment angulaire relatif du neutron et du proton.

fig 4



$$C' \left\{ \begin{matrix} I_c' \\ M_c' \end{matrix} \right. \text{ tel que } \vec{I}_c' = \vec{I}_c + \vec{J}_n = \vec{I}_c + \vec{l}_n + \vec{S}_n .$$

fig 5



$$d \left\{ \begin{matrix} I_d \\ M_d \end{matrix} \right. \text{ tel que } \vec{I}_d = \vec{J} + \vec{S}_{1p} = \vec{l} + \vec{S}_{1n} + \vec{S}_{1p}$$

$$|I_d M_d\rangle = \sum_{\mu \sigma_p} (j\mu S_p \sigma_p | I_d M_d) |j\mu\rangle |S_p \sigma_p\rangle$$

$$|j\mu\rangle = \sum_{m \sigma_n} (\ell m S_n \sigma_n | j\mu) |\ell m\rangle |S_n \sigma_n\rangle$$

et par suite :

$$|I_d M_d\rangle = \sum_{\mu m \sigma_n \sigma_p} (j\mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j\mu) |\ell m\rangle |S_p \sigma_p\rangle |S_n \sigma_n\rangle$$

Faisons alors quelques remarques :

1) D'une façon générale, lorsqu'on met en jeu une expérience de réaction nucléaire on connaît :

- a) l'énergie des particules dans la voie d'entrée
- b) quelquefois les états quantiques de ces particules.

Nous supposerons dans tout ce qui suit, que le deuton et le noyau C sont dans leur état fondamental. Nous conviendrons alors de noter  $|\phi_{I_1}\rangle$  la fonction d'onde de la voie d'entrée afin de la différencier de toutes les autres fonctions  $|\phi_{i_1}\rangle$  décrivant toutes les autres éventualités (par exemple, C dans un état excité ...).

2) Lorsque nous avons développé  $|I_d M_d\rangle$  sur  $|\ell m\rangle |S_p \sigma_p\rangle |S_n \sigma_n\rangle$  nous avons supposé essentiellement que  $\ell$  avait une valeur fixée. Or, nous savons déjà que le deuton, dans son état fondamental, n'est pas un état pur de moment angulaire : c'est un mélange d'état S (96 %) et d'état D (4 %) (13). Donc nous devrions écrire en toute rigueur :

$$|I_d M_d\rangle = \sum_{\mu m \sigma_n \sigma_p} a_\ell (j\mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j\mu) |\ell m\rangle |S_p \sigma_p\rangle |S_n \sigma_n\rangle$$

$\ell = 0, 2$  (II-11)

$a_\ell$  étant un coefficient de dosage.

Nous avons vu plus haut que :

$$\psi_{I_d M_d}(\vec{r}_{pn}) = \langle \vec{r}_{pn} | I_d M_d \rangle$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \psi_{I_d M_d}(\vec{r}_{pn}) &= \sum_{\substack{\mu m \sigma_n \sigma_p \\ \ell=0,2}} a_\ell (j\mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j\mu) \\ &\quad \langle \vec{r}_{pn} | \ell m, S_n \sigma_n, S_p \sigma_p \rangle \\ &= \sum_{\substack{\mu m \sigma_n \sigma_p \\ \ell=0,2}} a_\ell (j\mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j\mu) \\ &\quad \langle \vec{r}_{pn} | \ell m \rangle | S_n \sigma_n \rangle | S_p \sigma_p \rangle \end{aligned}$$

Or :

$$\langle \vec{r}_{pn} | \ell, m \rangle = \psi_{\ell m}^d(\vec{r}_{pn}) = \text{fonction d'onde du deuteron dans l'état de moment angulaire relatif}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi_{I_d M_d}(\vec{r}_{pn}) &= \sum_{\substack{\mu m \sigma_n \sigma_p \\ \ell=0,2}} a_\ell (j\mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j\mu) \\ &\quad \psi_{\ell m}^d(\vec{r}_{pn}) | S_n \sigma_n \rangle | S_p \sigma_p \rangle \end{aligned} \quad (II-12)$$

Considérons maintenant la fonction  $\psi_{I_c' M_c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc})$

$$\psi_{I_c' M_c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) = \langle \vec{\xi} \vec{r}_{nc} | I_c' M_c' \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{I_c, M_c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) &= \sum_{l_n m_n \sigma_n} (I_c l_n j_n l_n | I_c, M_c') (l_n m_n s_n \sigma_n | j_n l_n) \\
 &\quad < \vec{\xi}, \vec{r}_{nc} | I_c l_n, l_n m_n > | s_n \sigma_n > \\
 &= \sum_{l_n m_n \sigma_n} (I_c l_n j_n l_n | I_c, M_c') (l_n m_n s_n \sigma_n | j_n l_n) \\
 &\quad \psi_{I_c l_n}^{c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) | s_n \sigma_n >
 \end{aligned}$$

Supposons que nous puissions séparer les variables  $\vec{\xi}$  des variables  $\vec{r}_{nc}$  (c'est le cas lorsque le noyau cible considéré est constitué par un coeur non affecté dans la réaction). Alors :

$$\psi_{I_c l_n}^{c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) = \psi_{I_c l_n}(\vec{\xi}) \cdot \psi_{l_n m_n}^n(\vec{r}_{nc})$$

expression dans laquelle  $\psi_{l_n m_n}^n(\vec{r}_{nc})$  désigne la fonction d'onde du neutron capturé par le coeur C avec le moment angulaire relatif  $l_n$  et où  $\psi_{I_c l_n}(\vec{\xi})$  désigne la fonction d'onde du coeur dans la voie de sortie.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 \psi_{I_c, M_c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) &= \sum_{l_n m_n \sigma_n} (I_c l_n j_n l_n | I_c, M_c') (l_n m_n s_n \sigma_n | j_n l_n) \\
 &\quad \psi_{I_c l_n}(\vec{\xi}) \psi_{l_n m_n}^n(\vec{r}_{nc}) | s_n \sigma_n > \quad (II-13)
 \end{aligned}$$

Reportons ces expressions dans  ${}^1T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}$  (formule II-9) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
1T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} &= \int \sum_{I_c \mu_c j_n \mu_n} (I_c \mu_c j_n \mu_n | I_c, M_c) (l_n m_n S_n \sigma_n | j_n \mu_n) \psi_{I_c \mu_c}^* (\vec{\xi}) \\
&\quad \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \psi_{l_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \langle S_n \sigma_n | \langle S_p \sigma_p | \exp[-i \vec{K}_b \vec{r}_{pc'}] \{V_\beta\} \right. \\
&\quad \sum_{\substack{\mu m S_p \sigma_p \\ l=0,2}} a_l (j \mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (l m S_n \sigma_n | j \mu) \psi_{l m}^d(\vec{r}_{pn}) \\
&\quad \left. \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} |S_p \sigma_p \rangle |S_n \sigma_n \rangle \psi_{I_c M_c}(\vec{\xi}) \exp[i \vec{K}_d \vec{r}_{dc}] d\vec{\xi} d\vec{\tau} \right]
\end{aligned}$$

Tenons compte du fait que les fonctions de spin sont orthonormées :

$$1T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{I_c \mu_c j_n \mu_n \\ \mu m \\ l=0,2}} a_l (I_c \mu_c j_n \mu_n | I_c, M_c) (l_n m_n S_n \sigma_n | j_n \mu_n) \\
(j \mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (l m S_n \sigma_n | j \mu)$$

$$\int \psi_{I_c \mu_c}^* (\vec{\xi}) \psi_{I_c M_c}(\vec{\xi}) d\vec{\xi} \cdot \int \exp[-i \vec{K}_b \vec{r}_{pc'}] \psi_{l_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{l m}^d(\vec{r}_{pn}) \exp[i \vec{K}_d \vec{r}_{dc}] d\vec{\tau}$$

En intégrant sur les variables internes  $\vec{\xi}$  du noyau cible et en posant :

$$\int \psi_{I_c \mu_c}^* (\vec{\xi}) \psi_{I_c M_c}(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \theta_{I_c} \delta_{\mu_c M_c}$$

on obtient :

$$1T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{\mu_n m_n S_n \sigma_n \\ \mu m \\ l=0,2}} a_l (I_c M_c j_n \mu_n | I_c, M_c) (l_n m_n S_n \sigma_n | j_n \mu_n) \\
(j \mu S_p \sigma_p | I_d M_d) (l m S_n \sigma_n | j \mu)$$

$$\theta_{I_c} B_{l_n m_n}^{p m} \quad (11-14)$$

avec :

$$B_{\ell_n m_n}^{\ell_m} = \int \exp[-i \vec{k}_b \vec{r}_{pc}] \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{\ell_m}^d(\vec{r}_{pn}) \exp[i \vec{k}_a \vec{r}_{dc}] d\vec{r}$$

## CHAPITRE III

## ETUDE DU DEUXIEME TERME

Nous nous proposons dans ce chapitre, de trouver l'expression en représentation  $\{\vec{r}\}$  du deuxième terme de la série de Born. Les méthodes employées seront sensiblement identiques à celles que nous avons utilisées au chapitre précédent et nous verrons d'ailleurs que des problèmes semblables se posent..

On sait que le second terme de la série de Born s'écrit :

$$2T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} \frac{1}{E - H_1 + i\varepsilon} V_{\alpha} | \phi_{i_1} \rangle$$

soit encore :

$$2T_{\alpha i_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} G_{\alpha}^{+} V_{\alpha} | \phi_{i_1} \rangle \quad (\text{III-1})$$

avec

$$G_{\alpha}^{+} = \frac{1}{E - H_1 + i\varepsilon}$$

Comme nous bornons notre étude aux réactions où les particules de la voie d'entrée sont dans leur état fondamental, nous nous intéressons seulement à l'élément de matrice :

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} G_{\alpha}^{+} V_{\alpha} | \phi_{I_1} \rangle$$

Dans tout ce qui suit, comme au chapitre II, nous désignerons par :

$\vec{r}$  les variables relatives  
 $\vec{\eta}$  les variables internes

D'autre part, rappelons que nous avons posé :

$$|\phi_{i1}\rangle = |\vec{K}_2\rangle |\psi_{id}\rangle |\psi_{ic}\rangle = |\vec{K}_2\rangle |\psi_{i\alpha}\rangle$$

$$|\phi_{i2}\rangle = |\vec{K}_b\rangle |\psi_{ip}\rangle |\psi_{ic'}\rangle = |\vec{K}_b\rangle |\psi_{i\beta}\rangle$$

et nous savons que  $|\psi_{i\alpha}\rangle$  et  $|\psi_{i\beta}\rangle$  sont vecteurs propres d'opérateurs qui ne dépendent que des variables internes, alors que  $|\vec{K}_2\rangle$  et  $|\vec{K}_b\rangle$  sont vecteurs propres d'opérateurs qui ne dépendent que des variables relatives.

On a :

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = \langle \phi_{i2} | V_{\beta} G_{\alpha}^+ V_{\alpha} | \vec{K}_2, \psi_{i\alpha} \rangle \quad (\text{III-3})$$

Considérons l'espace des vecteurs propres  $|\psi_{i\alpha}\rangle$

$$H_{\alpha} |\psi_{i\alpha}\rangle = [H_d + H_c] |\psi_{i\alpha}\rangle = \epsilon_{i\alpha} |\psi_{i\alpha}\rangle$$

Cet espace est un espace complet : en effet, les hamiltoniens  $H_d$  et  $H_c$ , et par suite leur somme, sont des opérateurs hermitiques.

Symboliquement nous avons donc :

$$P_{H_{\alpha}} = \sum_{i\alpha} |\psi_{i\alpha}\rangle \langle \psi_{i\alpha}| = 1$$

$\sum_{i\alpha}$  étant un symbole représentant une somme discrète ( $\sum_{i\alpha}$ ) ou continue ( $\int di_{\alpha}$ ) suivant que le spectre de fonctions est lui même discret ou non.

Considérons l'opérateur

$$G_{\alpha}^+ = \frac{1}{E - H_{\alpha} + i\epsilon} = \frac{1}{E - H_{\alpha} - T_{\alpha} + i\epsilon} = F(H_{\alpha}, T_{\alpha})$$

Proposons nous d'exprimer cette fonction  $F(H_{\alpha}, T_{\alpha})$  des observables  $H_{\alpha}$  et  $T_{\alpha}$  sous la forme d'une combinaison linéaire des projecteurs élémentaires

$|\varphi_{i\alpha}\rangle\langle\varphi_{i\alpha}|$  . En effet :

$$F(H_\alpha, T_\alpha) = P_{H_\alpha} F(H_\alpha, T_\alpha) = \sum_{i\alpha} |\varphi_{i\alpha}\rangle\langle\varphi_{i\alpha}| F(\varepsilon_{i\alpha}, T_\alpha)$$

expression que l'on peut encore écrire :

$$F(H_\alpha, T_\alpha) = |\varphi_{I\alpha}\rangle\langle\varphi_{I\alpha}| F(\varepsilon_{I\alpha}, T_\alpha) + \sum_{i\alpha \neq I\alpha} |\varphi_{i\alpha}\rangle\langle\varphi_{i\alpha}| F(\varepsilon_{i\alpha}, T_\alpha)$$

Introduisons alors le projecteur sur les états libres  $P_{T_\alpha} = 1 =$

$= \int |\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha$  dans  $F(H_\alpha, T_\alpha)$  de la manière suivante :

$$F(H_\alpha, T_\alpha) = G_\alpha^+ = |\varphi_{I\alpha}\rangle\langle\varphi_{I\alpha}| \int |\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha F(\varepsilon_{I\alpha}, T_\alpha) + \\ + \sum_{i\alpha \neq I\alpha} |\varphi_{i\alpha}\rangle\langle\varphi_{i\alpha}| \int |\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha F(\varepsilon_{i\alpha}, T_\alpha)$$

c'est à dire encore :

$$G_\alpha^+ = |\varphi_{I\alpha}\rangle\langle\varphi_{I\alpha}| \int \frac{|\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha}{E - \varepsilon_{I\alpha} - T_\alpha + i\varepsilon} + \sum_{i\alpha \neq I\alpha} |\varphi_{i\alpha}\rangle\langle\varphi_{i\alpha}| \int \frac{|\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha}{E - \varepsilon_{i\alpha} - T_\alpha + i\varepsilon}$$

Mais  $|\vec{K}_\alpha\rangle$  étant état propre de  $T_\alpha$  pour la valeur propre  $\frac{\hbar^2 K_\alpha^2}{2M_\alpha}$  la fonction de Green prendra la forme :

$$G_\alpha^+ = |\varphi_{I\alpha}\rangle\langle\varphi_{I\alpha}| \int \frac{|\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha}{E - \varepsilon_{I\alpha} - \frac{\hbar^2 K_\alpha^2}{2M_\alpha} + i\varepsilon} + \\ + \sum_{i\alpha \neq I\alpha} |\varphi_{i\alpha}\rangle\langle\varphi_{i\alpha}| \int \frac{|\vec{K}_\alpha\rangle\langle\vec{K}_\alpha| d\vec{K}_\alpha}{E - \varepsilon_{i\alpha} - \frac{\hbar^2 K_\alpha^2}{2M_\alpha} + i\varepsilon}$$

Posons  $\frac{2M_\alpha(E - \varepsilon_{i\alpha})}{\hbar^2} = K_{i\alpha}^2$  il vient :

$$G_{\alpha}^{+} = \frac{2M_{\alpha}}{\hbar^2} \left\{ |\varphi_{I_{\alpha}}\rangle \langle \varphi_{I_{\alpha}}| \int \frac{|\vec{K}_{\alpha}\rangle \langle \vec{K}_{\alpha}| d\vec{K}_{\alpha}}{K_{I_{\alpha}}^2 - K_{\alpha}^2 + i\varepsilon'} + \sum_{i_{\alpha} \neq I_{\alpha}} |\varphi_{i_{\alpha}}\rangle \langle \varphi_{i_{\alpha}}| \int \frac{|\vec{K}_{\alpha}\rangle \langle \vec{K}_{\alpha}| d\vec{K}_{\alpha}}{K_{i_{\alpha}}^2 - K_{\alpha}^2 + i\varepsilon''} \right\} \quad (\text{III-4})$$

En reportant cette expression dans celle de  $2T_{\alpha I_{\alpha} \rightarrow \beta i_2}$  (formule III.3) nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2T_{\alpha I_{\alpha} \rightarrow \beta i_2} &= \frac{2M_{\alpha}}{\hbar^2} \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} | \varphi_{I_{\alpha}} \rangle \langle \varphi_{I_{\alpha}} | \int \frac{|\vec{K}_{\alpha}\rangle \langle \vec{K}_{\alpha}| d\vec{K}_{\alpha}}{K_{I_{\alpha}}^2 - K_{\alpha}^2 + i\varepsilon'} V_{\alpha} |\vec{K}_{\alpha}, \varphi_{I_{\alpha}}\rangle \\ (\text{III-5}) \quad &+ \sum_{i_{\alpha} \neq I_{\alpha}} \frac{2M_{\alpha}}{\hbar^2} \langle \phi_{i_2} | V_{\beta} | \varphi_{i_{\alpha}} \rangle \langle \varphi_{i_{\alpha}} | \int \frac{|\vec{K}_{\alpha}\rangle \langle \vec{K}_{\alpha}| d\vec{K}_{\alpha}}{K_{i_{\alpha}}^2 - K_{\alpha}^2 + i\varepsilon''} V_{\alpha} |\vec{K}_{\alpha}, \varphi_{i_{\alpha}}\rangle \end{aligned}$$

Dans le cas où  $V_{\alpha}$  est un potentiel diagonal ne dépendant que des variables relatives nous voyons alors que la somme  $\sum_{i_{\alpha} \neq I_{\alpha}}$  est nulle car,  $V_{\alpha}$  commute avec  $|\varphi_{i_{\alpha}}\rangle$  (qui ne contient que des variables internes) et parce que :

$$\langle \varphi_{I_{\alpha}} | \varphi_{i_{\alpha}} \rangle = 0$$

Etudions maintenant le cas où  $V$  dépend des variables internes  $\vec{r}_{\alpha}$  et introduisons les projecteurs  $\int |\vec{r}_{\alpha}\rangle \langle \vec{r}_{\alpha}| d\vec{r}_{\alpha}$  et  $\int |\vec{r}'_{\alpha}\rangle \langle \vec{r}'_{\alpha}| d\vec{r}'_{\alpha}$  dans l'expression :

$$Q = \langle \varphi_{i_{\alpha}} | V_{\alpha} | \varphi_{I_{\alpha}} \rangle$$

On a :

$$Q = \int \langle \varphi_{i_{\alpha}} | \vec{r}_{\alpha} \rangle \langle \vec{r}_{\alpha} | V_{\alpha} | \vec{r}'_{\alpha} \rangle \langle \vec{r}'_{\alpha} | \varphi_{I_{\alpha}} \rangle d\vec{r}_{\alpha} d\vec{r}'_{\alpha}$$

Supposons que :

- 1)  $V_\alpha$  soit un potentiel central diagonal dans la représentation choisie
- 2) que les fonctions d'onde  $\psi_{i_\alpha}(\vec{r}_\alpha)$  puissent se développer sur la base des harmoniques sphériques. Alors :

$$Q = \int \psi_{i_\alpha}^*(\vec{r}_\alpha) V_\alpha(\vec{r}_\alpha) \psi_{I_\alpha}(\vec{r}_\alpha) d\vec{r}_\alpha \int \gamma_{l_\alpha m_\alpha}^*(\Omega) \gamma_{l_\alpha m_\alpha}(\Omega) d\Omega$$

$$Q = \int \psi_{i_\alpha}(\vec{r}_\alpha) V_\alpha(\vec{r}_\alpha) \psi_{I_\alpha}(\vec{r}_\alpha) d\vec{r}_\alpha \int_{l_\alpha} \int_{m_\alpha} \int_{M_\alpha}$$

Ce résultat se généralise encore pour un potentiel  $V_\alpha$  dépendant d'un couplage spin-orbite  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ . Posant  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  il nous faut supposer cette fois que les fonctions d'onde se séparent en parties radiale et angulaire dans l'espace des  $J^2, J_z, L^2, S^2$ .

Dans tous les cas, la sommation  $\sum_{i_\alpha \neq I_\alpha}$  disparaît et il reste :

(III-6)

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \frac{2M_\alpha}{\hbar^2} \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \psi_{I_\alpha} \rangle \langle \psi_{I_\alpha} | \int \frac{|\vec{K}_2\rangle \langle \vec{K}_2| d\vec{K}_2}{K_{I_\alpha}^2 - K_2^2 + i\varepsilon'} V_\alpha | \psi_{I_\alpha} \rangle |\vec{K}_2\rangle$$

Introduisons les projecteurs :

$$\int |\vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha\rangle \langle \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha| d\vec{r}_\alpha d\vec{r}_\alpha = 1$$

$$\int |\vec{r}_\alpha' \vec{r}_\alpha'\rangle \langle \vec{r}_\alpha' \vec{r}_\alpha'| d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha' = 1$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} &= \frac{2M_\alpha}{\hbar^2} \int \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha | \Psi_{I_\alpha} \rangle \langle \Psi_{I_\alpha} | \int \frac{|\vec{K}_\alpha \rangle \langle \vec{K}_\alpha | d\vec{K}_\alpha}{K_{I_\alpha}^2 - K_\alpha^2 + i\varepsilon'} \\
&\quad |\vec{r}_\alpha' \vec{r}_\alpha' \rangle \langle \vec{r}_\alpha' \vec{r}_\alpha' | V_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle | \Psi_{I_\alpha} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha' \\
&= \frac{2M_\alpha}{\hbar^2} \int \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha | \Psi_{I_\alpha} \rangle \langle \Psi_{I_\alpha} | \int \frac{\langle \vec{r}_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle \langle \vec{K}_\alpha | \vec{r}_\alpha' \rangle d\vec{K}_\alpha}{K_{I_\alpha}^2 - K_\alpha^2 + i\varepsilon'} \\
&\quad |\vec{r}_\alpha' \rangle \langle \vec{r}_\alpha' \vec{r}_\alpha' | V_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle | \Psi_{I_\alpha} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha'
\end{aligned}$$

Le facteur  $\int \frac{\langle \vec{r}_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle \langle \vec{K}_\alpha | \vec{r}_\alpha' \rangle d\vec{K}_\alpha}{K_{I_\alpha}^2 - K_\alpha^2 + i\varepsilon'}$  n'est autre que la fonction de Green bien connue pour un hamiltonien de particules libres et pour la valeur  $K_\alpha^2$ .

Sa valeur est :

$$\int \frac{\exp i \vec{K}_\alpha (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha')}{K_{I_\alpha}^2 - K_\alpha^2 + i\varepsilon'} d\vec{K}_\alpha = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha'|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha'|}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} &= -\frac{M_\alpha}{2\pi \hbar^2} \int \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha | \Psi_{I_\alpha} \rangle \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha'|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha'|} \langle \Psi_{I_\alpha} | \vec{r}_\alpha' \rangle \\
&\quad \langle \vec{r}_\alpha' \vec{r}_\alpha' | V_\alpha | \vec{K}_\alpha \Psi_{I_\alpha} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha'
\end{aligned}$$

$V_\alpha$  n'est défini que dans la voie d'entrée. Pour l'exprimer uniquement dans cette voie, introduisons encore le projecteur

$$\int |\vec{r}_\alpha'' \vec{r}_\alpha'' \rangle \langle \vec{r}_\alpha'' \vec{r}_\alpha'' | d\vec{r}_\alpha'' d\vec{r}_\alpha'' = 1$$

$$\begin{aligned}
2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} &= -\frac{M_\alpha}{2\pi \hbar^2} \int \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha \rangle \langle \vec{r}_\alpha | \Psi_{I_\alpha} \rangle \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha'|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\alpha'|} \langle \Psi_{I_\alpha} | \vec{r}_\alpha' \rangle \\
&\quad \langle \vec{r}_\alpha \vec{r}_\alpha' | V_\alpha | \vec{r}_\alpha'' \vec{r}_\alpha'' \rangle \langle \vec{r}_\alpha'' \vec{r}_\alpha'' | \vec{K}_\alpha \Psi_{I_\alpha} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha' d\vec{r}_\alpha'' d\vec{r}_\alpha''
\end{aligned}$$

Mais  $V_\alpha$  étant diagonal on a :

$$\langle \vec{r}'_\alpha \vec{\eta}'_\alpha | V_\alpha | \vec{r}''_\alpha \vec{\eta}''_\alpha \rangle = \{V_\alpha\} \delta(\vec{r}'_\alpha \vec{\eta}'_\alpha - \vec{r}''_\alpha \vec{\eta}''_\alpha)$$

Reportons cette expression dans celle de  $2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2}$  et intégrons sur  $\vec{r}''_\alpha, \vec{\eta}''_\alpha$ .

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = -\frac{M_\alpha}{2\pi\hbar^2} \int \langle \phi_{i_2} | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \langle \vec{\eta}_\alpha | \psi_{I_2} \rangle \frac{\exp iK_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|} \\ \langle \psi_{I_2} | \vec{\eta}'_\alpha \rangle \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle \langle \vec{\eta}'_\alpha | \psi_{I_2} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}'_\alpha d\vec{\eta}'_\alpha$$

La quantité  $\langle \phi_{i_2} | V_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle$  sera explicitée en introduisant les projecteurs

$$\int |\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta \rangle \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta = 1$$

$$\int |\vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta \rangle \langle \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta | d\vec{r}'_\beta d\vec{\eta}'_\beta = 1$$

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = -\frac{M_\alpha}{2\pi\hbar^2} \int \langle \phi_{i_2} | \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta \rangle \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | V_\beta | \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta \rangle \langle \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \langle \vec{\eta}_\alpha | \psi_{I_1} \rangle \\ \frac{\exp iK_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|} \langle \psi_{I_1} | \vec{\eta}'_\alpha \rangle \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle \langle \vec{\eta}'_\alpha | \psi_{I_2} \rangle \\ d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}'_\alpha d\vec{\eta}'_\alpha d\vec{r}'_\beta d\vec{\eta}'_\beta d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta.$$

Mais, par hypothèse nous savons que :

$$\langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | V_\beta | \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta \rangle = \{V_\beta\} \delta(\vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta - \vec{r}'_\beta \vec{\eta}'_\beta)$$

Si bien qu'après intégration sur  $\vec{r}'_\beta$  et  $\vec{\eta}'_\beta$ ,  $2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} 2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} &= -\frac{M_\alpha}{2\pi\hbar^2} \int \langle \vec{K}_b | \vec{r}_\beta \rangle \langle \varphi_{i_\beta} | \vec{\eta}_\beta \rangle \{V_\beta\} \langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle \\ &\quad \langle \vec{\eta}_\alpha | \varphi_{I_\alpha} \rangle \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|} \langle \varphi_{I_\alpha} | \vec{\eta}'_\alpha \rangle \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle \\ &\quad \langle \vec{\eta}'_\alpha | \varphi_{I_\alpha} \rangle d\vec{r}_\alpha d\vec{\eta}_\alpha d\vec{r}'_\alpha d\vec{\eta}'_\alpha d\vec{r}_\beta d\vec{\eta}_\beta \end{aligned}$$

Comme dans le premier terme nous retrouvons dans l'expression de  $2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2}$  le produit scalaire  $\langle \vec{r}_\beta \vec{\eta}_\beta | \vec{r}_\alpha \vec{\eta}_\alpha \rangle$ , un raisonnement analogue à celui que nous avons fait nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} &= -\frac{M_\alpha}{2\pi\hbar^2} \int \langle \vec{K}_b | \vec{r}_\beta \rangle \langle \varphi_{i_\beta} | \vec{\eta}_\beta \rangle \{V_\beta\} \langle \vec{\eta}_\alpha | \varphi_{I_\alpha} \rangle \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|} \\ &\quad \langle \varphi_{I_\alpha} | \vec{\eta}'_\alpha \rangle \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle \langle \vec{\eta}'_\alpha | \varphi_{I_\alpha} \rangle d\vec{r}'_\alpha d\vec{\eta}'_\alpha d\vec{\eta}_\alpha. \end{aligned}$$

Nous pouvons encore simplifier cette expression en remarquant que  $\langle \varphi_{I_\alpha} | \vec{\eta}'_\alpha \rangle$  commute avec  $\{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle$  et en tenant compte de la relation :

$$\int \langle \varphi_{I_\alpha} | \vec{\eta}'_\alpha \rangle \langle \vec{\eta}'_\alpha | \varphi_{I_\alpha} \rangle d\vec{\eta}'_\alpha = 1$$

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = - \frac{M_\alpha}{2\pi\hbar^2} \int \langle \vec{K}_b | \vec{r}_\beta \rangle \langle \varphi_{i\beta} | \vec{r}_\beta \rangle \{V_\beta\} \langle \vec{\eta}_\alpha | \varphi_{I_\alpha} \rangle \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|} \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle d\vec{r}'_\alpha d\vec{r}'_\alpha \quad (III-7)$$

Explicitons  $\langle \varphi_{i\beta} |$  et  $|\varphi_{I_\alpha}\rangle$

$$\langle \varphi_{i\beta} | = \langle I_c, M_c | \langle S_p \sigma_p |$$

$$|\varphi_{I_\alpha}\rangle = |I_c M_c\rangle |I_d M_d\rangle$$

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = - \frac{M_\alpha}{2\pi\hbar^2} \int \langle \vec{K}_b | \vec{r}_\beta \rangle \langle S_p \sigma_p | \langle I_c, M_c | \vec{\eta}_\beta \rangle \{V_\beta\} \langle \vec{\eta}_\alpha | I_d M_d, I_c M_c \rangle \frac{\exp i K_\alpha |\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}'_\alpha|} \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_\alpha | \vec{K}_\alpha \rangle d\vec{r}'_\alpha d\vec{r}'_\alpha$$

Reprenant nos notations du chapitre II, nous écrirons :

$$|\vec{r}_\alpha\rangle \equiv |\vec{r}_{dc}\rangle$$

$$|\vec{r}_\beta\rangle \equiv |\vec{r}_{pc'}\rangle$$

$$|\vec{\eta}_\alpha\rangle \equiv |\vec{r}_{pn}, \vec{\xi}\rangle$$

$$|\vec{\eta}_\beta\rangle \equiv |\vec{r}_{nc}, \vec{\xi}\rangle$$

D'autre part, en décomposant, comme nous l'avons déjà fait, les moments angulaires totaux des noyaux et des deutons, sur les moments angulaires partiels de leurs constituants, nous obtenons, en faisant les mêmes hypothèses qu'auparavant :

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = -\frac{M_d}{2\pi\hbar^2} \int \sum_{l_c, l_n, m_n, \sigma_n} (I_c, l_c, j_n, l_n | I_c, M_c) (l_n, m_n, S_n, \sigma_n | j_n, l_n)$$

$$\langle \vec{K}_b | \vec{r}_{pc'} \rangle \langle S_p, \sigma_p | \langle S_n, \sigma_n | \langle l_n, m_n | \vec{r}_{nc} \rangle \langle I_c, l_c | \vec{\xi} \rangle \{V_\beta\}$$

$$\sum_{\substack{l=0,2 \\ p, m, \sigma_p, \sigma_n, \sigma_{ip}}} a_p (j, p, S_p, \sigma_{ip} | I_d, M_d) (l, m, S_n, \sigma_n | j, p) \langle \vec{\xi} | I_c, M_c \rangle \langle \vec{r}_{pn} | l, m \rangle | S_n, \sigma_n \rangle$$

$$| S_p, \sigma_{ip} \rangle \frac{\exp(i K_2 |\vec{r}_{dc} - \vec{r}'_{dc}|)}{|\vec{r}_{dc} - \vec{r}'_{dc}|} \{V_\alpha\} \langle \vec{r}'_{dc} | \vec{K}_2 \rangle d\vec{\xi} d\vec{c} d\vec{r}'_{dc}$$

Tenons compte du fait que les fonctions de spin sont orthonormées et introduisons la largeur réduite.  $\Theta_{I_c}$

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M_d}{2\pi\hbar^2} \sum_{\substack{l_n, m_n, \sigma_n \\ p, m, l=0,2}} a_p (I_c, M_c, j_n, l_n | I_c, M_c) (l_n, m_n, S_n, \sigma_n | j_n, l_n)$$

$$(j, p, S_p, \sigma_p | I_d, M_d) (l, m, S_n, \sigma_n | j, p) \Theta_{I_c} \begin{pmatrix} l, m \\ l_n, m_n \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} l, m \\ l_n, m_n \end{pmatrix} = \int \exp(-i \vec{K}_b \vec{r}_{pc'}) \psi_{l_n, m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{l, m}^d(\vec{r}_{pn}) \frac{\exp(i K_2 |\vec{r}_{dc} - \vec{r}'_{dc}|)}{|\vec{r}_{dc} - \vec{r}'_{dc}|}$$

$$\{V_\alpha\} \exp(i \vec{K}_2 \vec{r}'_{dc}) d\vec{c} d\vec{r}'_{dc}$$

## CHAPITRE IV

CALCUL DU PREMIER TERME POUR  
LA REACTION  $^{28}\text{Si} (d, p) ^{29}\text{Si}$  A  
L'ETAT FONDAMENTAL

---

Ce chapitre sera consacré au calcul du premier terme  $T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2}$  pour la réaction  $^{28}\text{Si} (d, p) ^{29}\text{Si}$  qui nous fait passer d'une voie d'entrée où les constituants sont dans leur état fondamental vers une voie de sortie particulière caractérisée par un noyau  $^{29}\text{Si}$  lui aussi dans son état fondamental.

Reprenons l'expression de  $T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2}$  (formules II.14 et II.15).

$$T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta i_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{l_n m_n \sigma_n \\ \mu m \\ l=0,2}} a_p (I_c M_c j_n \mu_n | I_c, M_c) (l_n m_n s_n \sigma_n | j_n \mu_n) \\ (j_p s_p \sigma_p | I_d M_d) (l_m s_m \sigma_m | j_p) \theta_{I_c} B_{l_n m_n}^{l_m}$$

avec  $B_{l_n m_n}^{l_m} = \int \exp(-i \vec{k}_b \cdot \vec{r}_{pc'}) \psi_{l_n m_n}^*(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{l_m}^d(\vec{r}_{pn}) \exp(i \vec{k}_d \cdot \vec{r}_{dc}) d\vec{r}$

Toutes les variables qui figurent dans l'intégrale ne sont pas des variables indépendantes. Nous avons en effet les deux relations (figure 3).

$$\vec{r}_{pc'} = \vec{r}_{pn} + \frac{M_c}{M_c'} \vec{r}_{nc}$$

$$\vec{r}_{dc} = \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{nc}$$

Conservons  $\vec{r}_{nc}$  et  $\vec{r}_{pn}$  comme variables indépendantes, il vient :

$$B_{\ell_n m_n}^{\ell m} = \int \exp\left\{i \vec{K}_b \left[ \vec{r}_{pn} + \frac{M_c}{M_c'} \vec{r}_{nc} \right]\right\} \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{\ell, m}^d(\vec{r}_{pn}) \\ \exp\left\{i \vec{K}_a \left[ \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right]\right\} d\vec{r}_{pn} d\vec{r}_{nc}$$

Le potentiel  $V_\beta$  choisi étant un potentiel central.

$$B_{\ell_n m_n}^{\ell m} = \int \exp i \left[ \vec{K}_a - \frac{M_c}{M_c'} \vec{K}_b \right] \vec{r}_{nc} \cdot \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{\ell, m}^d(\vec{r}_{pn}) \\ \exp - i \left[ \vec{K}_b - \frac{M_p}{M_d} \vec{K}_a \right] \vec{r}_{pn} d\vec{r}_{pn} d\vec{r}_{nc} \quad (IV-2)$$

Le calcul de cette intégrale nécessite le choix des fonctions d'onde donnant la structure interne des constituants de la réaction  $\psi_{\ell_n m_n}^n(\vec{r}_{nc})$  et  $\psi_{\ell m}^d(\vec{r}_{pn})$  et impose la détermination des potentiels d'interaction. Ces potentiels, d'ailleurs, ont été soumis au cours des chapitres précédents à certaines restrictions : ils doivent, par exemple, être diagonaux en représentation  $\{\vec{r}\}$ , décroître plus vite que  $\frac{1}{r}$  quand  $r$  augmente etc.... Par contre, aucune condition n'a été imposée aux fonctions d'onde.

Nous allons voir maintenant que les hypothèses concernant l'évolution du processus faites lors des études précédentes vont nous aider à obtenir quelques renseignements supplémentaires pour orienter notre choix.

Considérons le système dans la voie de sortie et écrivons l'hamiltonien décrivant ce système (Cf. figure 6).

$$H = \sum_i T_i + T_n + T_p + \sum_i V_{ip} + \sum_i V_{in} + \sum_{i>j} V_{ij} + V_{np}$$

$$H = H_\alpha + T_\alpha + V_\alpha.$$

avec :

$$H_{\beta} = \sum_i T_i + \sum_{i>j} V_{ij} + T_n + \sum_i V_{in}$$

$$T_{\beta} = T_p$$

$$V_{\beta} = \sum_i V_{ip} + V_{np}$$

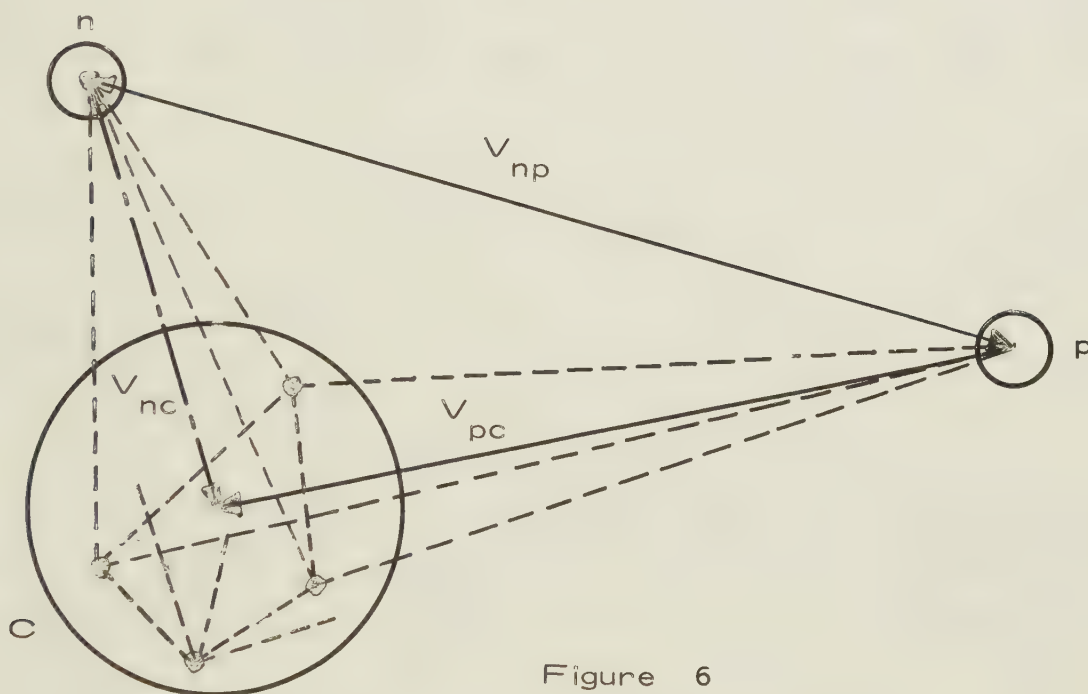


Figure 6

Lorsque nous avons défini l'état quantique du noyau C dans la voie de sortie, nous avons opéré comme si ce noyau agissait comme un "tout". Nous avons supposé en effet que cet état quantique n'était pas modifié au cours de la réaction. Il nous est donc possible maintenant de remplacer la multitude des interactions élémentaires par un terme global traduisant l'interaction du proton avec le noyau C dans son ensemble.

$$V_{\beta} = V_{pn} + V_{pc}$$

Si nous admettons, de plus, à la suite des travaux de RODBERG

(12) que le potentiel prépondérant est le potentiel  $V_{pu}$  nous prendrons :

$$V_{\beta} = V_{pn}$$

et dans ces conditions

$$\{V_{\beta}\} = V_{\beta}(r_{pn})$$

Le potentiel  $V_{\alpha}$  de la voie d'entrée a été choisi central et nous avons supposé qu'il ne dépendait que des variables relatives de cette voie. (figure 7)

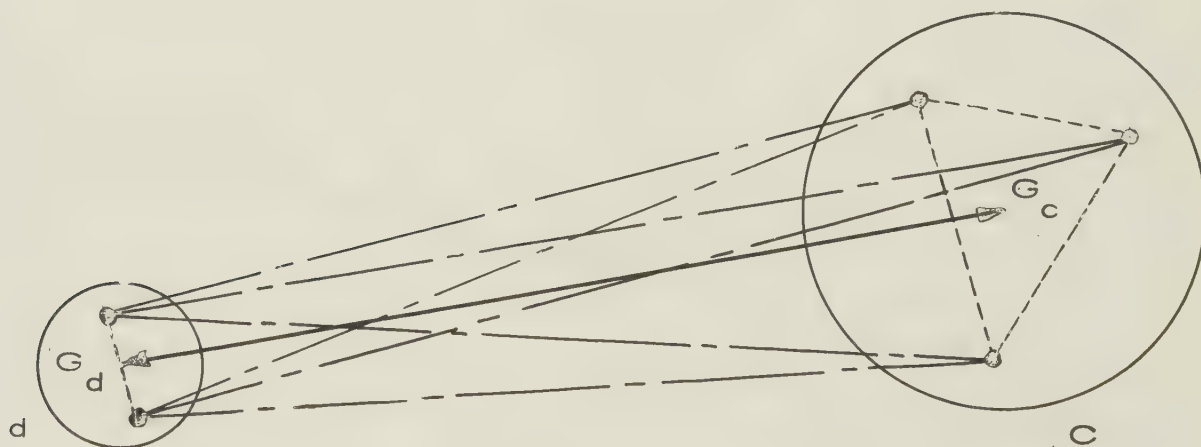


Figure 7

Toujours au chapitre II nous avons supposé que la fonction d'onde du noyau  $C'$  pouvait s'écrire sous la forme du produit de la fonction du noyau  $C$  par celle du neutron  $n$ .

$$\psi_{I_c \mu_c l_n m_n}^{c'}(\vec{\xi}, \vec{r}_{nc}) = \psi_{I_c \mu_c}^c(\vec{\xi}) \cdot \psi_{l_n m_n}^n(\vec{r}_{nc})$$

Cette dernière hypothèse revient à dire que l'hamiltonien  $T_n + \sum_i V_{in}$  commute avec l'un quelconque des hamiltoniens du type  $T_i + V_{ij}$ . Pour que cette condition soit vérifiée, il faut et il suffit que les nucléons  $i$  soient sans interaction avec le neutron  $n$  ce qui n'est réalisé que si nous remplaçons le potentiel  $\sum_i V_{in}$  par un potentiel moyen  $V_{nc}$  ne dépendant pas analytiquement des variables radiales et angulaires des nucléons de  $C$  et traduisant l'effet global de ces nucléons sur le neutron  $n$ .

Nous avons choisi pour  $V_{nc}$  un puits rectangulaire de portée  $R$  et de profondeur  $V_0$ . Il est clair alors que le développement de  $\psi_{\ell_n m_n}^n(\vec{r}_{nc})$  sur les harmoniques sphériques est valable, mais on montre encore que (9)

a) quand le neutron est à l'extérieur du puits, la fonction radiale est proportionnelle à une fonction de Hankel sphérique

$$\psi_{\ell_n}^n(r_{nc}) = A h_{\ell_n}'(i K_n r_{nc}). \quad (IV-3)$$

avec

$A$  = constante de normalisation

$$K_n^2 = \frac{2 \frac{M_n \cdot M_c}{M_n + M_c} E_n}{\hbar^2} \quad (IV-4)$$

$E_n$  étant l'énergie de liaison du neutron fixé sur le noyau  $C$  avec le moment angulaire relatif  $\ell_{nt}$

b) quand le neutron est à l'intérieur du puits, la fonction radiale est proportionnelle à une fonction de Bessel sphérique

$$\psi_{\ell_n}^n(r_{nc}) = A' j_{\ell_n}(K r_{nc}) \quad (IV-5)$$

avec

$A' =$  constante de normalisation

$$K^2 = \frac{2 \frac{M_n M_c}{M_n + M_c} [E_n + V_0]}{\hbar^2} \quad (\text{IV-6})$$

Remarquons que la constante  $A'$  est reliée à la constante  $A$ . En effet, si nous écrivons la continuité des solutions à la frontière du puits, nous avons :

$$A h'_{\ell_n}(iK_n R) = A' j_{\ell_n}(KR). \quad (\text{IV-7})$$

Notons enfin que le paramètre  $R$  est lié à  $K$  c'est à dire à  $V_0$ . Pour les états  $s$  ( $\ell = 0$ ) cette relation s'écrit :

$$-K_n R = KR \cotg(KR) \quad (\text{IV.8})$$

Pour déterminer la fonction d'onde  $\psi_{\ell m}^d(\vec{r}_{pn})$  du deuton, nous procéderons de la même façon et admettrons que le potentiel du deuton est un potentiel central sans couplage tensoriel. Alors :

$$\psi_{\ell, m}^d(\vec{r}_{pn}) = \psi_{\ell}^d(r_{pn}) Y_{\ell m}(\Omega_{r_{pn}}) \quad (\text{IV-9})$$

D'autre part, si nous fixons l'expression analytique de ce potentiel en prenant un potentiel de Hulthen : qui constitue une bonne approximation du potentiel de Yukawa.

$$V_d = -V_d^0 \frac{\exp(-\mu_d r_{pn})}{1 - \exp(-\mu_d r_{pn})}$$

nous pourrions connaître l'expression analytique de  $\psi_{\ell}^d(r_{pn})$  et plus précisément l'état  $\ell = 0$  du deuton sera décrit par la fonction de Hulthen (13)

$$\psi_{\ell=0}^d(r_{pn}) = \left\{ \frac{\eta(\eta^2-1)}{2} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{\exp\left(-\frac{\eta-1}{2} \mu_d r_{pn}\right) - \exp\left(\frac{\eta+1}{2} \mu_d r_{pn}\right)}{r_{pn}} \right\} \quad (\text{IV-10})$$

avec

$$\eta^2 = \frac{k^2}{\mu_d^2} \quad k^2 = \frac{M^* V_0^d}{\hbar^2} \quad M^* = \frac{M_p M_n}{M_p + M_n} \quad (\text{IV-11})$$

Revenons au calcul de  $B_{\ell_n m_n}^{\ell, m}$ . En tenant compte du fait que  $\{V_\beta\} = V_\beta(r_{pn})$  on voit que l'intégrale double se sépare en deux intégrales simples.

$$B_{\ell_n m_n}^{\ell, m} = J_{\ell_n m_n} \cdot F_{\ell m} \quad (\text{IV-12})$$

avec

$$J_{\ell_n m_n} = \int \exp i \left[ \vec{\kappa}_a - \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{\kappa}_b \right] \vec{r}_{nc} \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) d\vec{r}_{nc} \quad (\text{IV-13})$$

$$F_{\ell m} = \int \{V_\beta\} \exp i \left[ \vec{\kappa}_b - \frac{M_p}{M_d} \vec{\kappa}_a \right] \vec{r}_{pn} \psi_{\ell, m}^d(\vec{r}_{pn}) d\vec{r}_{pn} \quad (\text{IV-14})$$

Considérons l'expression de  $J_{\ell_n m_n}$

Posons :  $\vec{\nu} = \vec{\kappa}_a - \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{\kappa}_b$  et développons  $\exp i \vec{\nu} \vec{r}_{nc}$  sur les harmoniques sphériques.

$$\exp i \vec{\nu} \vec{r}_{nc} = 4\pi \sum_{LM} i^L J_L(\nu r_{nc}) Y_{LM}^*(\Omega_\nu) Y_{LM}(\Omega_{r_{nc}})$$

Comme d'autre part :

$$\psi_{\ell_n m_n}^n(\vec{r}_{nc}) = \psi_{\ell_n}^n(r_{nc}) Y_{\ell_n m_n}(\Omega_{r_{nc}})$$

Nous avons :

$$J_{\ell_n m_n} = 4\pi \sum_{LM} i^L Y_{LM}^*(\Omega_\nu) \int j_L(\nu r_{nc}) \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(r_{nc}) r_{nc}^2 dr_{nc} \\ \int Y_{\ell_n m_n}^*(\Omega_{r_{nc}}) Y_{LM}(\Omega_{r_{nc}}) d\Omega_{r_{nc}}$$

Effectuons les intégrations angulaires.

$$\int Y_{\ell_n m_n}^*(\Omega_{r_{nc}}) Y_{LM}(\Omega_{r_{nc}}) d\Omega_{r_{nc}} = \int_{L\ell_n} \int_{Mm_n}$$

Il reste finalement :

$$J_{\ell_n m_n} = 4\pi (i)^{\ell_n} Y_{\ell_n m_n}^*(\Omega_\nu) \int j_{\ell_n}(\nu r_{nc}) \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(r_{nc}) r_{nc}^2 dr_{nc}. \quad (IV-15)$$

Considérons maintenant la quantité  $F_{\ell m}$  et posons  $\vec{x} = \vec{K}_b - \frac{M_P}{M_d} \vec{K}_a$

Développons l'onde plane  $\exp(-i\vec{x}\vec{r}_{pn})$  et la fonction  $\psi_{\ell m}^d(\vec{r}_{pn})$  sur les harmoniques sphériques ; reportons ensuite ces expressions dans celle de  $F_{\ell m}$

$$F_{\ell m} = 4\pi (-i)^{\ell'} Y_{\ell' m'}(\Omega_x) \int \{V_\beta\} \psi_{\ell m}^d(r_{pn}) j_{\ell'}(x r_{pn}) r_{pn}^2 dr_{pn} \\ \int Y_{\ell m}(\Omega_{r_{pn}}) Y_{\ell' m'}(\Omega_{r_{pn}}) d\Omega_{r_{pn}}.$$

Après intégration sur les variables angulaires il reste :

$$F_{\ell, m} = 4\pi (-i)^{\ell} Y_{\ell m}(\Omega_x) \int \{V_\beta\} \psi_{\ell m}^d(r_{pn}) j_{\ell}(x r_{pn}) r_{pn}^2 dr_{pn}$$

Si nous reportons ces dernières expressions dans celle de

$T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}$  (formule II-14) on obtient :

$$T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{\mu_n m_n \sigma_n \\ \mu m \\ \ell = 0, 2}} a_{\ell} (I_c M_c J_n \mu_n | I_c' M_c') (\ell_n m_n S_n \sigma_n | J_n \mu_n) \\ (j_p S_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j_p) \quad (IV-16)$$

$$\partial_{I_c} (4\pi)^2 i^{\ell_n} (-i)^{\ell} Y_{\ell_n m_n}(\Omega_n) Y_{\ell m}(\Omega_x) \\ \int r_{nc}^2 j_{\ell_n}(\nu r_{nc}) \psi_{\ell_n}^n(r_{nc}) dr_{nc} \int r_{pn}^2 \{V_{\beta}\} \psi_{\ell}^d(r_{pn}) j_{\ell}(x r_{pn}) dr_{pn}.$$

Nous allons appliquer ces résultats à la réaction  $^{28}\text{Si} (d, p) ^{29}\text{Si}$  pour l'état fondamental. L'expression précédente se simplifie puisque  $I_c = M_c = \ell_n = m_n = 0$

Calculons donc :

$$J_{\infty} = \sqrt{4\pi} \int r_{nc}^2 j_0(\nu r_{nc}) \psi_0^n(r_{nc}) dr_{nc}$$

avec

$$\psi_0^n(r_{nc}) \begin{cases} A h_0^i(i K_n r_{nc}) & \text{quand le neutron est à l'extérieur du puits} \\ -A \frac{\exp -K_n R}{K_n \sin(KR)} j_0(K r_{nc}) & \text{quand le neutron est à l'intérieur du puits} \end{cases}$$

Avec une telle fonction, pour décrire le neutron fixé sur C, l'intégrale précédente se divise en deux intégrales partielles.

$$J_{\infty} = -\sqrt{4\pi} A \left\{ \frac{\exp(-K_n R)}{\nu K_n} \frac{K}{\sin(KR)} \int_0^R \sin(\nu r_{nc}) \sin(K r_{nc}) dr_{nc} + \frac{1}{\nu K_n} \int_R^{\infty} \sin(\nu r_{nc}) \exp(-K_n r_{nc}) dr_{nc} \right\}$$

et l'on obtient après intégration

$$J_{\infty} = -\sqrt{4\pi} A \frac{\exp(-K_n R)}{K_n} \left\{ \frac{1}{\nu(\nu^2 + K_n^2)} \left[ \nu \cos(\nu R) + K_n \sin(\nu R) \right] + \frac{R}{\sin(KR)} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{\sin[(K-\nu)R]}{(K-\nu)R} - \frac{\sin[(K+\nu)R]}{(K+\nu)R} \right] \right\}$$

Tels sont les résultats auxquels on aboutit dans le cas d'une méthode directe.

Certains auteurs ont utilisé dans leurs calculs l'hypothèse de BUTLER et que TOBOCMAN (14) appelle le postulat de l'interaction de surface inférant que presque tout le stripping se produit à la surface de la cible du fait du libre parcours moyen du deuton à l'intérieur de la matière nucléaire.

L'intégrale  $J_{\infty}$  aura donc pour limite inférieure le rayon  $R_0 \gg R$  appelé rayon de stripping et l'on obtient alors :

$$J_{\infty} = -\sqrt{4\pi} A \frac{\exp(-K_n R_0)}{K_n} \left\{ \frac{1}{\nu(\nu^2 + K_n^2)} \left[ \nu \cos(\nu R_0) + K_n \sin(\nu R_0) \right] \right\}$$

En résumé :

$$J_{\infty} = -\sqrt{4\pi} \frac{\exp(-K_n R_0)}{K_n} \left\{ \mathcal{B}_{\infty} \right\} \quad (IV-17)$$

avec

$$p = R$$

$$B_{00} = \left\{ \frac{1}{\nu(\nu^2 + K_n^2)} \left[ \nu \cos(\nu R) + K_n \sin(\nu R) \right] + \frac{R}{2\nu \sin KR} \left[ \frac{\sin[(K-\nu)R]}{(K-\nu)R} - \frac{\sin[(K+\nu)R]}{(K+\nu)R} \right] \right\}$$

dans le cas général

ou

$$p = R_0$$

$$B_{00} = \frac{1}{\nu(\nu^2 + K_n^2)} \left[ \nu \cos(\nu R_0) + K_n \sin(\nu R_0) \right]$$

si l'on fait l'approximation de BUTLER.

Considérons l'expression de  $B_{00}$  obtenue dans le cas général.

Nous y constatons la présence de la quantité  $1/\sin(KR)$  qui peut devenir infinie pour certaine valeur de  $KR$ .

En fait, les paramètres  $K$  et  $R$  sont donnés par la relation :

$$-K_n R = KR \cotg(KR)$$

qui nous donne :

$$\frac{1}{\sin^2(KR)} = \frac{K_n^2 + K^2}{K^2} = \frac{V_0}{V_0 + E_n}$$

Soit :

$$\frac{1}{\sin(KR)} = - \left( \frac{V_0}{V_0 + E_n} \right)^{1/2}$$

$$\text{avec } E_n = -8,19 \text{ MeV}$$

$E_n$  est négatif, pourtant nous voyons que pour des profondeurs de puits convenables physiquement ( $20 \text{ MeV} \leq V_0 \leq 80 \text{ MeV}$ ) la quantité  $1/\sin(KR)$  a une valeur parfaitement définie.

Nous avons choisi le signe "moins" car nous avons pris la deuxième -

me détermination pour la cotg. (figure 8). En effet, la résolution de :

$$K_n R = K R \cotg (K R)$$

nous donne

$$K R = -\alpha + n\pi$$

et il nous faut prendre  $n = 2$  pour tenir compte du fait que le neutron capturé par le noyau de  $^{28}\text{Si}$  est fixé dans un état  $2S$ .

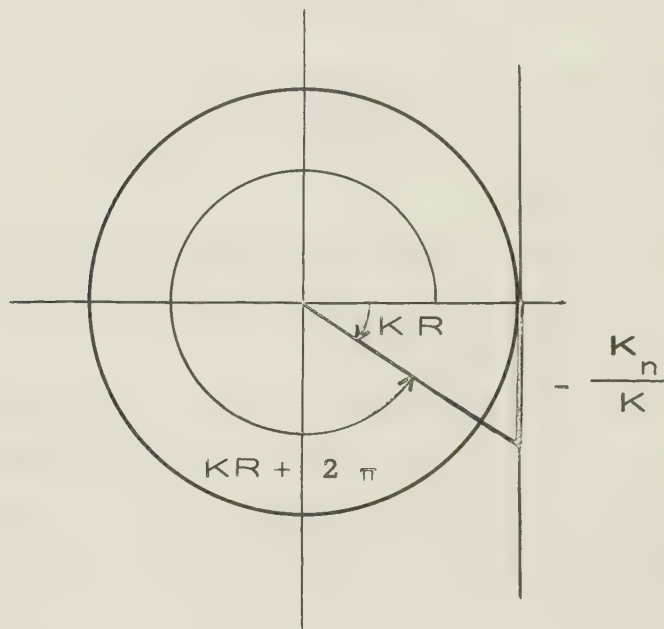


Figure 8

En utilisant la relation liant  $V_0$  à  $K$

$$K^2 = \frac{2 \frac{M_n M_c}{M_n + M_c} [E_n + V_0]}{h^2}$$

nous avons alors calculé les valeurs de  $K$  et de  $R$  en fonction de celles de  $V_0$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 1.

Nous avons ensuite calculé la quantité  $\exp(-K_n R) K_n^{-1} \{B_\infty\}$  dans le cas général (tableau 2) et dans le cas de l'approximation de BUTLER (tableau 3) en prenant les valeurs suivantes (15) :

- 1) énergie du deuton dans le laboratoire  $E_d = 8 \text{ MeV}$
- 2)  $Q$  de la réaction  $= Q = 6.246 \text{ MeV}$
- 3) énergie de liaison du neutron sur la couche  $\ell_n = 0$   
 $E_n = - 8.194 \text{ MeV}$

TABLEAU 1

Détermination de  $K$  et de  $R$ 

| $V_0$ | 25    | 30    | 35    | 40    | 45    | 50    | 55    | 60    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $K$   | 0,885 | 1,008 | 1,118 | 1,217 | 1,310 | 1,395 | 1,477 | 1,553 |
| $R$   | 6,01  | 5,22  | 4,67  | 4,25  | 3,93  | 3,67  | 3,46  | 3,28  |

$V_0$  est exprimé en MeV,  $R$  en Fermi,  $K$  en  $\text{Fermi}^{-1}$

TABLEAU 2

$$\exp(-K_n R) K_n^{-1} \mathcal{B}_\infty \quad (\text{cas général})$$

$V_0$  est exprimé en MeV et  $\theta$  en degré

Facteur multiplicatif  $10^{-39}$

| $\theta \backslash V_0$ | 25     | 30     | 35     | 40     | 45     | 50     | 55     | 60     |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                       | 0,708  | 0,962  | 1,183  | 1,374  | 1,542  | 1,691  | 1,822  | 1,939  |
| 10                      | 0,582  | 0,817  | 1,026  | 1,209  | 1,370  | 1,515  | 1,642  | 1,756  |
| 20                      | 0,294  | 0,480  | 0,655  | 0,814  | 0,958  | 1,089  | 1,206  | 1,312  |
| 30                      | 0,015  | 0,131  | 0,258  | 0,381  | 0,499  | 0,610  | 0,711  | 0,804  |
| 40                      | -0,159 | -0,115 | -0,044 | 0,038  | 0,124  | 0,210  | 0,292  | 0,370  |
| 50                      | -0,222 | -0,242 | -0,222 | -0,180 | -0,127 | -0,067 | -0,007 | -0,052 |
| 60                      | -0,211 | -0,274 | -0,297 | -0,292 | -0,270 | -0,236 | -0,196 | -0,154 |
| 70                      | -0,164 | -0,251 | -0,305 | -0,329 | -0,332 | -0,321 | -0,302 | -0,275 |
| 80                      | -0,111 | -0,204 | -0,275 | -0,329 | -0,343 | -0,352 | -0,348 | -0,337 |
| 90                      | -0,065 | -0,152 | -0,229 | -0,319 | -0,325 | -0,348 | -0,358 | -0,360 |
| 100                     | -0,032 | -0,106 | -0,182 | -0,287 | -0,293 | -0,326 | -0,347 | -0,358 |
| 110                     | -0,012 | -0,069 | -0,140 | -0,245 | -0,256 | -0,296 | -0,325 | -0,343 |
| 120                     | 0,000  | -0,043 | -0,105 | -0,204 | -0,221 | -0,265 | -0,299 | -0,323 |
| 130                     | 0,006  | -0,025 | -0,079 | -0,167 | -0,191 | -0,237 | -0,273 | -0,302 |
| 140                     | 0,009  | -0,013 | -0,059 | -0,137 | -0,166 | -0,213 | -0,251 | -0,282 |
| 150                     | 0,010  | -0,005 | -0,045 | -0,113 | -0,147 | -0,194 | -0,233 | -0,265 |
| 160                     | 0,010  | -0,001 | -0,037 | -0,096 | -0,134 | -0,181 | -0,220 | -0,253 |
| 170                     | 0,009  | 0,001  | -0,032 | -0,084 | -0,126 | -0,173 | -0,212 | -0,246 |
| 180                     | 0,009  | 0,002  | -0,030 | -0,077 | -0,124 | -0,170 | -0,210 | -0,243 |

| $R$  | 6,5<br>Fermi | 6<br>Fermi |
|------|--------------|------------|
| 0°   | 0,372        | 0,4807     |
| 10°  | 0,290        | 0,3844     |
| 20°  | 0,120        | 0,1810     |
| 30°  | - 0,0132     | 0,0087     |
| 40°  | - 0,0590     | - 0,0666   |
| 50°  | - 0,0416     | - 0,0639   |
| 60°  | - 0,0065     | - 0,0278   |
| 70°  | 0,0169       | 0,0066     |
| 80°  | 0,0234       | 0,0251     |
| 90°  | 0,0174       | 0,0276     |
| 100° | 0,0068       | 0,0203     |
| 110° | - 0,0026     | 0,0097     |
| 120° | - 0,0078     | 0,0002     |
| 130° | - 0,0119     | - 0,0067   |
| 140° | - 0,0119     | - 0,0109   |
| 150° | - 0,0112     | - 0,0130   |
| 160° | - 0,0102     | - 0,0140   |
| 170° | - 0,0094     |            |
| 180° | -            |            |

TABLEAU 3

$$\frac{\exp(-K_n R_0)}{K_n}$$

approximation de BUTLER

Fac.mult. =  $10^{-39}$

Pour calculer la deuxième intégrale radiale  $F_{00}$  il faut connaître l'expression analytique du potentiel  $V_{\beta}(r_{pn})$ . Nous envisagerons différentes formes et nous comparerons les résultats, mais auparavant faisons une remarque.

Nous avons vu que le deuton pouvait être décrit par une fonction du type

$$\psi_{\ell m}^d(r_{pn}) = a_0 S + a_2 D$$

Etant donné la faible proportion d'état D par rapport à l'état S, nous pouvons, dans une première approximation, nous limiter à l'état S et prendre :

$$\ell = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_2 = 0$$

1) Calcul de  $F_{00}$  avec  $V_{\beta} = -V_{0\delta}^{\beta} \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2}$

---

Reprenons l'expression de l'intégrale radiale  $F_{\ell m}$  (formule IV-14) en prenant pour potentiel d'interaction dans la voie de sortie un potentiel de la forme :

$$V_{\beta} = -V_{0\delta}^{\beta} \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2}$$

Après intégration nous avons :

$$F_{\ell m} = -\frac{4\pi}{2} V_{0\delta}^{\beta} (-i)^{\ell} y_{\ell m}(\Omega_x) \psi_{\ell}^d(0) j_{\ell}(0)$$

et par suite :

$$F_{00} = \frac{\sqrt{4\pi}}{2} V_{0\delta}^{\beta} \psi_0^d(0) \quad (IV-20)$$

Nous en déduisons :

$$B_{oo}^{\circ} = \frac{4\pi}{2} V_{oe}^{\beta} \psi_0^1(0) A \frac{\exp(-K_n \rho)}{K_n} \{B_{oo}\} \quad (IV-21)$$

avec

$$\rho = R$$

$$B_{oo} = \frac{1}{\nu(\nu^2 + K_n^2)} \left[ \nu \cos(\nu R) + K_n \sin(\nu R) \right] + \frac{R}{2\nu \sin(KR)} \left[ \frac{\sin[(K-\nu)R]}{(K-\nu)R} - \frac{\sin[(K+\nu)R]}{(K+\nu)R} \right]$$

dans le cas général

ou

$$\rho = R_o \quad B_{oo} = \frac{1}{\nu(\nu^2 + K_n^2)} \left[ \nu \cos(\nu R_o) + K_n \sin(\nu R_o) \right]$$

si l'on fait l'approximation de BUTLER.

Reprenons la formule (I-8) donnant l'expression de la section efficace différentielle. En y faisant  $l_c = l_n = l = 0$  nous voyons qu'elle se simplifie puisque finalement elle s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = C^{te} \left[ \exp(-K_n \rho) \cdot K_n^{-1} \cdot B_{oo} \right]^2$$

Nous en avons déduit les courbes de distribution angulaire dans l'un et l'autre cas (figure 9 et figure 10).

2) Calcul de  $F_{oo}$  avec  $V_{\beta}(r_{pn}) = -V_{OE}^{\beta} \exp(-\mu_{\beta} r_{pn})$

Nous avons dans ce cas :

$$F_{oo} = -\sqrt{4\pi} V_{OE}^{\beta} \int_0^{\infty} r_{pn}^2 \exp(-\mu_{\beta} r_{pn}) \left\{ \frac{n(n^2-1)}{2} \right\}^{1/2} \frac{\sin(X r_{pn})}{X r_{pn}} \frac{\exp(-(\frac{n-1}{2})\mu_d r_{pn}) - \exp(-(\frac{n+1}{2})\mu_d r_{pn})}{r_{pn}} dr_{pn}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$

Figure 9

Cas général - Potentiel "delta"

1 -  $V_0 = 30$  MeV -  $R = 5,22$  Fm

2 -  $V_0 = 35$  MeV -  $R = 4,67$  Fm

3 -  $V_0 = 40$  MeV -  $R = 4,25$  Fm

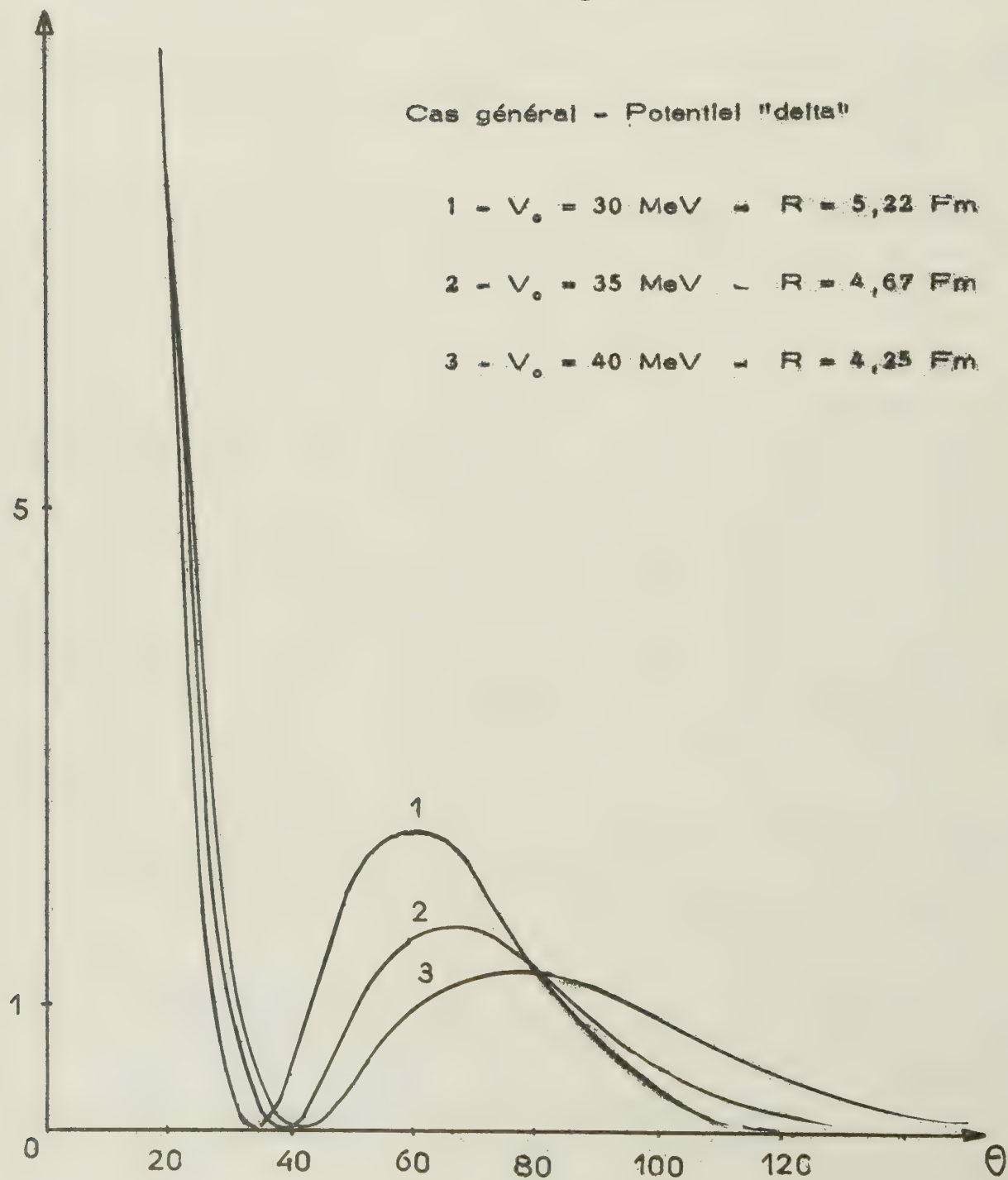
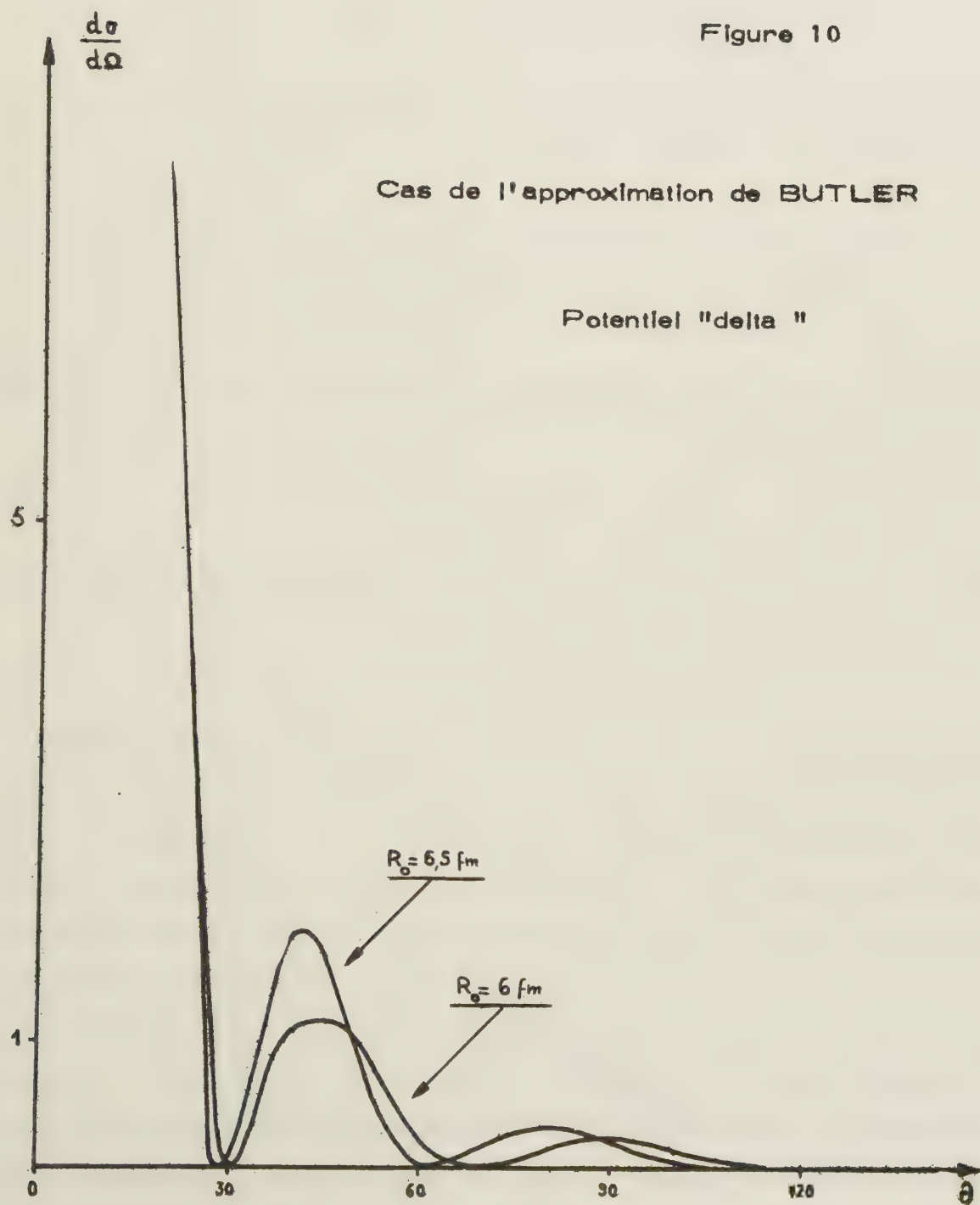


Figure 10

Cas de l'approximation de BUTLER

Potentiel "delta "



En intégrant on trouve :

$$F_{\infty} = -\sqrt{4\pi} V_{0E}^{\beta} \left\{ \frac{\eta(\eta^2-1)}{2} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\eta-1}{2} \mu_d + \mu_{\beta}\right)^2 + \chi^2} - \frac{1}{\left(\frac{\eta+1}{2} \mu_d + \mu_{\beta}\right)^2 + \chi^2} \right\}$$

et l'on a

$$B_{\infty}^{\infty} = 4\pi V_{0\delta}^{\beta} A \frac{\exp(-\kappa_n \rho)}{\kappa_n} \left\{ B_{\infty} \right\} \left\{ \frac{\eta(\eta^2-1)}{2} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\eta-1}{2} \mu_d + \mu_{\beta}\right)^2 + \chi^2} - \frac{1}{\left(\frac{\eta+1}{2} \mu_d + \mu_{\beta}\right)^2 + \chi^2} \right\}$$

Les courbes de distributions angulaires correspondantes (figures 11 et 12) ont été calculées en prenant :

$$\mu_{\beta} = 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$$

et en donnant à  $\mu_d$  une valeur généralement admise pour décrire le deuton

$$\mu_d = 0,65 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$$

Nous venons de calculer le premier terme de la série de BORN, avec différents potentiels. Ces potentiels ne sauraient évidemment exprimer les termes d'interactions nucléaires. Par ailleurs, le formalisme que nous avons utilisé pour décrire les réactions nucléaires n'est, lui aussi, qu'une théorie approchée. Nous l'avons cependant adopté et par conséquent considéré comme étant susceptible de représenter correctement les processus nucléaires. Supposons alors que nous connaissions l'expression analytique des forces nucléaires ; cette connaissance nous permettrait d'évaluer le premier terme  $1^{\text{T}}$  (exact) de la série de BORN. Supposons maintenant que nous prenions pour décrire les forces nucléaires des potentiels de contact, des

Figure 11

Cas général - Puits exponentiel

$$\mu_p = 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$$

$$1 - V_0 = 25 \text{ MeV} \rightarrow R = 6,01 \text{ Fm}$$

$$2 - V_0 = 30 \text{ MeV} \rightarrow R = 5,22 \text{ Fm}$$

$$3 - V_0 = 35 \text{ MeV} \rightarrow R = 4,67 \text{ Fm}$$

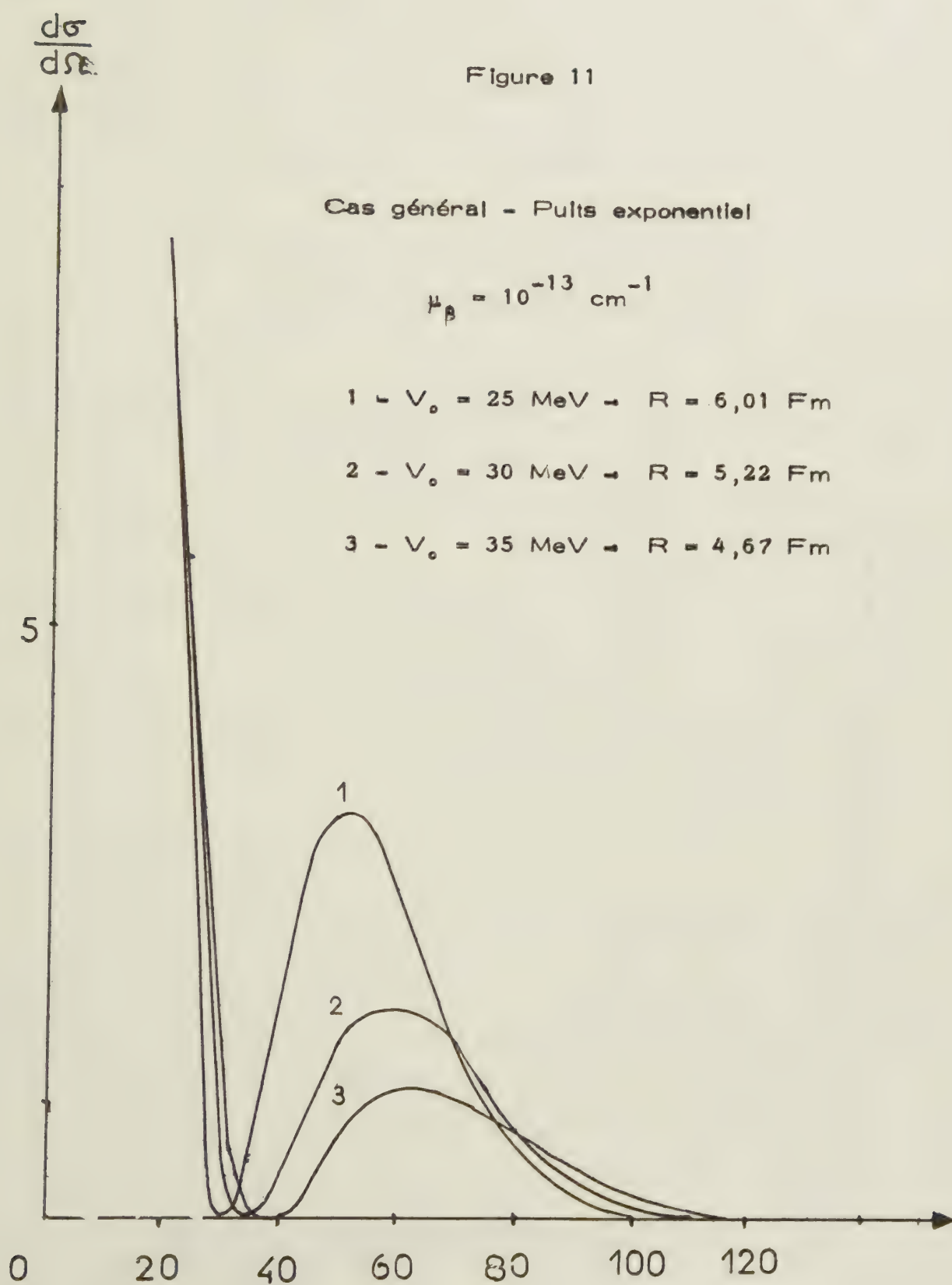
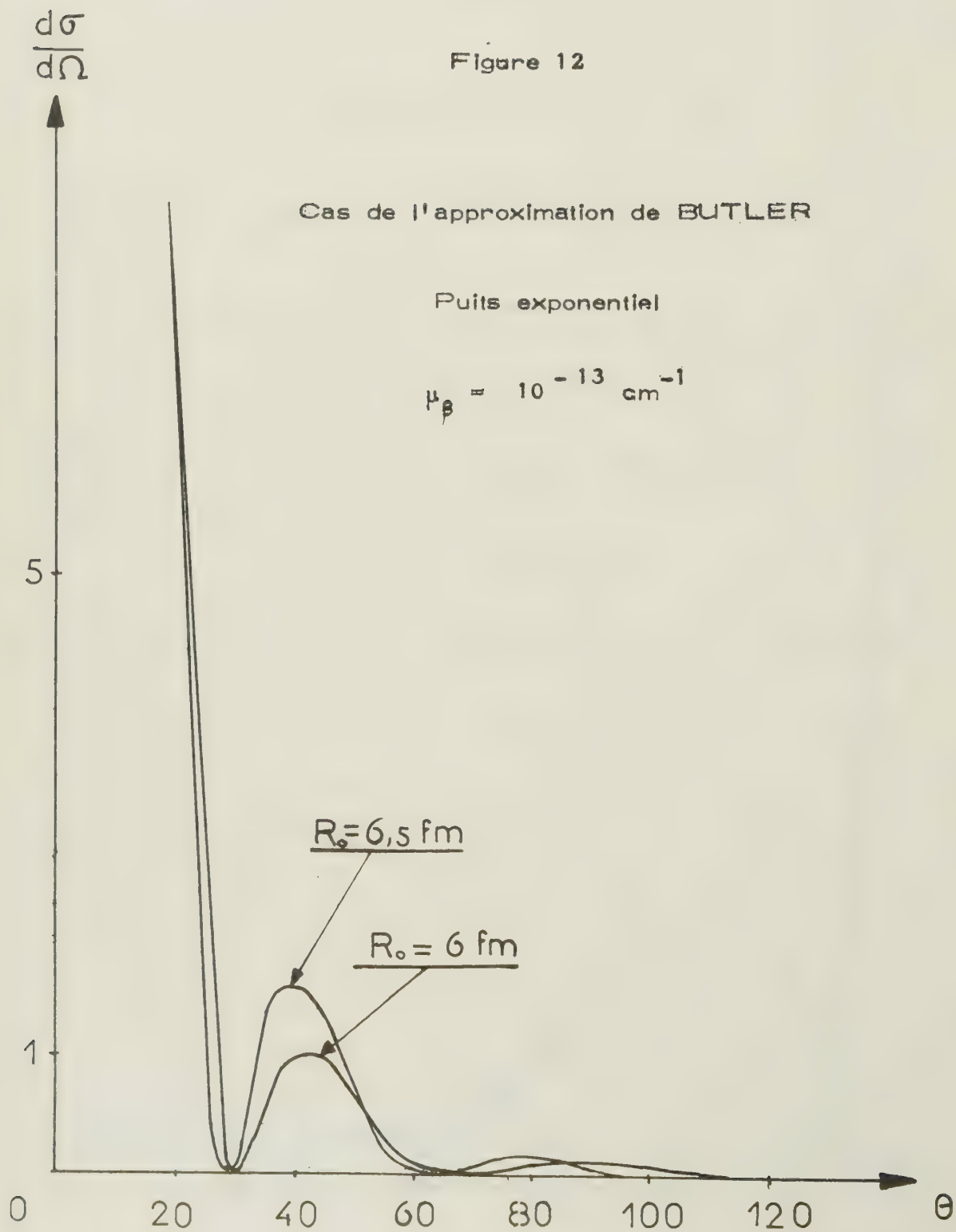


Figure 12

Cas de l'approximation de BUTLER

Puits exponentiel

$$\mu_B = 10^{-13} \text{ cm}^{-1}$$



potentiels du type exponentiel, nous trouverions alors  ${}_1T(\delta)$  ;  ${}_1T(\exp)$  pour le premier terme. Or, il se trouve qu'avec des potentiels aussi différents en nature que ces derniers, les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes. Il apparaît donc que notre formalisme, c'est à dire  ${}_1T$  n'est pas sensible au choix des potentiels.

$${}_1T(\text{exact}) \approx {}_1T(\delta) \approx {}_1T(\exp)$$

c'est à dire par exemple :

$$V_{0E}^{\beta} \left\{ \frac{\eta(\eta^2-1)}{2} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\eta-1}{2} \mu_d + \mu_p\right)^2 + \chi^2} - \frac{1}{\left(\frac{\eta+1}{2} \mu_d + \mu_p\right)^2 + \chi^2} \right\} = \frac{1}{2} V_{0\delta}^{\beta} \psi_p^d(0).$$

ce qui nous permet d'évaluer le coefficient  $V_{0\delta}^{\beta}$

En prenant pour  $\eta$ ,  $\mu_d$ ,  $\mu_p$  les quantités habituellement admises pour décrire le deuteron, nous pouvons dire que :

$$V_{0\delta}^{\beta} \lesssim 10 V_{0E}^{\beta} 10^{-40}$$

Evidemment, il ne s'agit là que d'un ordre de grandeur.

### 3) Retour au potentiel $\delta$

Nous verrons plus loin que, dans certains cas, le calcul du deuxième terme est grandement facilité si l'on conserve comme variables indépendantes, les variables  $\vec{r}_{dc}$  et  $\vec{r}_{nc}$ . C'est la raison pour laquelle nous avons voulu refaire les calculs en prenant pour potentiel  $V_{\beta}$  un potentiel "delta" exprimé en fonction de ces variables.

Considérons donc le cas où

$$\{V_{\beta}\} = -V_{0\delta}^{\beta} \delta[|\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc}|]$$

Nous avons alors pour expression de  $B_{\ell_n m_n}^{\ell, m}$

$$B_{\ell_n m_n}^{\ell, m} = -V_{0\delta}^{\beta} \int \exp(-i \vec{K}_b \frac{M_d}{M_p} \vec{r}_{dc}) \exp\left[i\left(\frac{M_d}{M_p} - \frac{M_c}{M_c'}\right) \vec{K}_b \vec{r}_{nc}\right] \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \\ \delta(|\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc}|) \psi_{\ell m}^d\left[\frac{M_d}{M_p} (\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc})\right] \exp(i \vec{K}_a \vec{r}_{dc}) d\vec{r}_{dc} \cdot d\vec{r}_{nc}$$

Intégrons sur  $\vec{r}_{dc}$

$$B_{\ell_n m_n}^{\ell m} = -\frac{V_{0\delta}^{\beta}}{2} \psi_{\ell m}^d(0) \int \exp(i \vec{v} \vec{r}_{nc}) \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) d\vec{r}_{nc} \\ = -\frac{V_{0\delta}^{\beta}}{2} \psi_{\ell m}^d(0) J_{\ell_n m_n}.$$

Nous en déduisons

$$B_{00}^{00} = \frac{1}{2} V_{0\delta}^{\beta} \psi_{00}^d(0) \sqrt{4\pi} A \frac{\exp(-K_n \rho)}{K_n} \{ \mathcal{B}_{\infty} \}$$

## CHAPITRE V

CALCUL DU DEUXIEME TERME  
 ETUDE DE SON INFLUENCE DANS LE  
 CAS DE LA REACTION  $^{28}\text{Si} (d, p) ^{29}\text{Si}$   
POUR L'ETAT FONDAMENTAL

Rappelons brièvement les résultats obtenus au chapitre III. (formules III-8 et III-9).

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M_\alpha}{2\pi \hbar^2} \sum_{\substack{\mu m \\ \ell=0,2}} \alpha_\ell (I_c M_c J_n \mu_n | I_c, M_c) (\ell_n m_n s_n \sigma_n | j_n \mu_n) \\ (j_p s_p \sigma_p | I_d M_d) (\ell_m s_m \sigma_m | j_p \mu) \theta_{I_c} C_{\ell m}^{\ell_n m_n}$$

avec

$$C_{\ell m}^{\ell_n m_n} = \int \exp(-i \vec{k}_b \cdot \vec{r}_{pc'}) \psi_{\ell_n m_n}^*(\vec{r}_{nc}) \{V_\beta\} \psi_{\ell_m}^d(\vec{r}_{pn}) \frac{\exp(i k_\alpha |\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{dc'}|)}{|\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{dc'}|} \\ \{V_\alpha\} \exp(i \vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}_{dc}) d\vec{r} \cdot d\vec{r}'_{dc}$$

Pour décrire l'interaction dans la voie d'entrée, nous choisirons successivement un potentiel "delta" et un potentiel de YUKAWA. Evidemment, un puits de portée nulle pour décrire les interactions d'un ensemble de nucléons sur un autre groupe, n'a pas grande réalité physique d'autant

moins que pour décrire de telles interactions, nous avons jusqu'à présent choisi des potentiels de portée finie (potentiel de Hulthén pour le deuton et puits carré pour le neutron fixe sur C). Le seul potentiel du type "delta" utilisé jusqu'alors ( $V_\beta$ ) ne traduisait que l'interaction d'un nucléon sur un autre. Un tel choix pour  $V_\alpha$  n'est donc pas heureux. Pourtant, et ceci explique la raison de ce calcul, c'est le seul cas donnant des résultats simples sur lesquels il nous sera possible de raisonner aisément.

---

I - Calcul de  $2T_{\alpha 1 \rightarrow \beta 12}$  avec  $V_\beta = -V_{0\beta}^\beta \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2}$   $V_\alpha = -V_{0\alpha}^\alpha \frac{\delta(r_{dc})}{r_{dc}^2}$

---

Nous conservons  $\vec{r}_{nc}$  et  $\vec{r}_{pn}$  comme variables indépendantes. Le changement de variable défini en (IV-1) donne :

$$C_{l_n m_n}^{l_m} = V_{0\beta}^\beta V_{0\alpha}^\alpha \int \exp[-i\vec{K}_b(\vec{r}_{pn} + \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{r}_{nc})] \psi_{l_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2} \psi_{l, m}^d(\vec{r}_{pn})$$

$$\frac{\exp i K_a |\vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} - \vec{r}'_{dc}|}{|\vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} - \vec{r}'_{dc}|} \frac{\delta(r'_{dc})}{r_{dc}'^2} \exp(i\vec{K}_a \vec{r}'_{dc}) d\vec{r}'_{dc} d\vec{r}$$

Développons l'onde plane  $\exp(i\vec{K}_a \vec{r}'_{dc})$  en harmoniques sphériques.

$$C_{l_n m_n}^{l_m} = V_{0\beta}^\beta V_{0\alpha}^\alpha \int \exp[-i\vec{K}_b(\vec{r}_{pn} + \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{r}_{nc})] \psi_{l_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2} \psi_{l, m}^d(\vec{r}_{pn})$$

$$4\pi \sum_{LM} i^L \frac{\exp i K_a |\vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} - \vec{r}'_{dc}|}{|\vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} - \vec{r}'_{dc}|} \frac{\delta(r'_{dc})}{r_{dc}'^2} j_L(K_a r'_{dc}) r_{dc}'^2 d\Omega_{r'_{dc}}$$

$$Y_{LM}^*(\Omega_{K_a}) Y_{LM}(\Omega_{r'_{dc}}) d\Omega_{r'_{dc}}$$

Intégrons sur  $\vec{r}'_{dc}$ . Pour cela, considérons la quantité

$$\begin{aligned} \left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} - \vec{r}'_{dc} \right| &= \left| \vec{R} - \vec{r}'_{dc} \right| \\ &= \left[ R^2 + r'^2_{dc} - 2 R r'_{dc} \cos \varphi \right]^{1/2} \end{aligned}$$

avec  $\varphi = (\vec{R}, \vec{r}'_{dc})$

Donc l'intégrale sur  $\vec{r}'_{dc}$  s'écrit

$$\begin{aligned} &\int 4\pi \sum_{LM} i^L j_L(K_2 r'_{dc}) \frac{\exp i K_2 [R^2 + r'^2_{dc} - 2 R r'_{dc} \cos \varphi]^{1/2}}{[R^2 + r'^2_{dc} - 2 R r'_{dc} \cos \varphi]^{1/2}} \delta(r'_{dc}) \\ &\quad Y_{LM}^*(\Omega_{K_2}) Y_{LM}(\Omega_{r'_{dc}}) dr'_{dc} d\Omega_{r'_{dc}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\int 2\pi \sum_{LM} i^L j_L(0) \frac{\exp i K_2 \left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right|}{\left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right|} Y_{LM}^*(\Omega_{K_2}) Y_{LM}(\Omega_{r'_{dc}}) d\Omega_{r'_{dc}}$$

or, tous les  $j_L(0)$  sont nuls sauf  $j_0(0) = 1$ . Il en résulte que l'intégrale précédente s'écrit :

$$2\pi \frac{\exp i K_2 \left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right|}{\left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right|}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} C_{l_n m_n}^{l_m} &= 2\pi V_{0\delta}^d V_{0\delta}^\beta \int \exp(-i \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{K}_b \vec{r}_{nc}) \psi_{l_n m_n}^*(\vec{r}_{nc}) \exp(-i \vec{K}_b \vec{r}_{pn}) \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2} \\ &\quad \psi_{l_m}^d(\vec{r}_{pn}) \frac{\exp i K_2 \left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right|}{\left| \vec{r}_{nc} + \frac{M_p}{M_d} \vec{r}_{pn} \right|} d\vec{r}_{nc} r_{pn}^2 dr_{pn} d\Omega_{r_{pn}} \end{aligned}$$

En procédant comme précédemment nous obtenons :

$$C_{l_n m_n}^{l m} = (2\pi)^2 V_{0\delta}^\alpha V_{0\delta}^\beta \gamma_{00}(\Omega_{\kappa_b}) \psi_{00}^d \int \exp\left[-i \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{\kappa}_b \vec{r}_{nc}\right] \psi_{l_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \frac{\exp(i \kappa_2 r_{nc})}{r_{nc}} d\vec{r}_{nc}$$

Intégrons maintenant sur  $\vec{r}_{nc}$  il vient :

$$C_{l_n m_n}^{l m} = (2\pi)^2 V_{0\delta}^\alpha V_{0\delta}^\beta \gamma_{00}(\Omega_{\kappa_b}) \psi_{00}^d \gamma_{l_n m_n}^{n*}(\Omega_{\kappa_b}) 4\pi (-i)^{l_n} \int_0^\infty j_{l_n}\left(\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right) \psi_{l_n}^{n*}(r_{nc}) \exp(i \kappa_2 r_{nc}) r_{nc} dr_{nc} \quad (V-1)$$

Appliquons ce résultat au cas de la réaction considérée, c'est à dire pour  $l = l_n = 0$

$$C_{00}^{00} = (2\pi)^2 V_{0\delta}^\alpha V_{0\delta}^\beta \psi_0^d(0) H_{00} \quad (V-2)$$

avec

$$H_{00} = \int_0^\infty r_{nc} j_0\left(\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right) \psi_0^{n*}(r_{nc}) \exp(i \kappa_2 r_{nc}) dr_{nc} \quad (V-3)$$

Nous avons explicité  $H_{00}$

$$H_{00} = -A \left\{ \mathcal{R}_{00} + i \mathcal{I}_{00} \right\} \quad (V-4)$$

en prenant pour fonction d'onde du deuton les expressions établies précédemment (IV-3, IV-5) on obtient :

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\infty} = & \frac{\exp(-\kappa_n R)}{\kappa_n \sin(\kappa R)} \int_0^R \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}} \sin(\kappa r_{nc}) \cos(\kappa_d r_{nc}) dr_{nc} \\ & + \frac{1}{\kappa_n} \int_R^\infty \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}} \exp(-\kappa_n r_{nc}) \cos(\kappa_d r_{nc}) dr_{nc} \end{aligned} \quad (V-5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\infty} = & \frac{\exp(-\kappa_n R)}{\kappa_n \sin(\kappa R)} \int_0^R \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}} \sin(\kappa r_{nc}) \sin(\kappa_d r_{nc}) dr_{nc} \\ & + \frac{1}{\kappa_n} \int_R^\infty \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}} \exp(-\kappa_n r_{nc}) \sin(\kappa_d r_{nc}) dr_{nc} \end{aligned}$$

En faisant l'approximation de BUTLER nous aurions eu :

$$\mathcal{R}_{\infty} = \frac{1}{\kappa_n} \int_{R_0}^\infty \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}} \exp(-\kappa_n r_{nc}) \cos(\kappa_d r_{nc}) dr_{nc} \quad (V-6)$$

$$\mathcal{J}_{\infty} = \frac{1}{\kappa_n} \int_{R_0}^\infty \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} \kappa_b r_{nc}} \exp(-\kappa_n r_{nc}) \sin(\kappa_d r_{nc}) dr_{nc}$$

De toute façon, dans l'un et l'autre cas

$$C_{\infty}^{\infty} = -(2\pi)^2 V_{\infty}^d V_{\infty}^p \Psi_0^d(0) A \left\{ \mathcal{R}_{\infty} + i \mathcal{J}_{\infty} \right\} \quad (V-7)$$

Or, en prenant pour  $V_\beta$  un potentiel de la forme  $\frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^2}$  nous avons trouvé pour le premier terme l'expression :

$$T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\substack{\mu_n m_n \sigma_n \\ \ell=0,2}} a_{\ell} (I_c M_c j_n \mu_n | I_c' M_c') (\ell_n m_n S_n \sigma_n | j_n \mu_n) \\ (j \mu S_P \sigma_P | I_d M_d) (\ell m S_n \sigma_n | j \mu) \Theta_{I_c} B_{\ell_n m_n}^{\ell m}$$

qui s'écrit encore pour  $I_c = \ell = \ell_n = 0$

$$T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \text{Cste} \frac{\exp(-K_n \rho)}{K_n} \{B_{00}\} \quad (V-8)$$

avec

$$\text{Cste} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\mu_n \nu \sigma_n} (0, 0 \frac{1}{2} \mu_n | I_c' M_c') (0, 0 S_n \sigma_n | \frac{1}{2} \mu_n) \\ 2\pi V_{00}^{\beta} \psi_0^d(0) A (\frac{1}{2} \mu \frac{1}{2} \sigma_P | 1 M_d) (0, 0 \frac{1}{2} \sigma_n | \frac{1}{2} \mu) \quad (V-9)$$

Avec les mêmes notations et pour la même réaction on a pour  $2 T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}$

$$2 T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \text{Cste} \frac{M_{\alpha}}{\hbar^2} V_{00}^{\alpha} \{R_{00} + i J_{00}\} \quad (V-10)$$

En majorant l'intégrale radiale  $R_{00}$  obtenue dans le cas général, nous obtenons successivement :

$$R_{00} \leq \frac{\exp(-K_n R)}{K_n \sin(KR)} \int_0^R \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}} dr_{nc} + \frac{1}{K_n} \int_R^{\infty} \exp(-K_n r_{nc}) dr_{nc}$$

c'est à dire encore

$$R_{00} \leq \frac{\exp(-K_n R)}{K_n \sin(KR)} \frac{1}{\frac{M_c}{M_c'} K_b} \int_0^{\frac{M_c}{M_c'} K_b R} \frac{\sin\left[\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right]}{\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}} d\left[\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right] + \frac{1}{K_n} \frac{\exp(-K_n R)}{K_n}$$

Or, quelque soit R

$$\int_0^{\frac{M_c}{M_{c'}} K_b R} \frac{\sin \left[ \frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc} \right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc}} d \left[ \frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc} \right] \leq 2$$

Donc

$$\mathcal{R}_{\infty} \leq \frac{\exp(-K_n R)}{K_n} \left[ \frac{1}{\sin[KR]} \frac{2M_{c'}}{M_c K_b} + \frac{1}{K_n} \right]$$

En procédant comme nous venons de le faire, nous déduisons que :

$$\mathcal{J}_{\infty} \leq \frac{\exp(-K_n R)}{K_n} \left[ \frac{1}{\sin[KR]} \frac{2M_{c'}}{M_c K_b} + \frac{1}{K_n} \right]$$

et par conséquent

$$|2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}| \leq \sqrt{2} \text{ Cste } \frac{M_a}{\hbar^2} V_{00}^{\alpha} \frac{\exp(-K_n R)}{K_n} \left| \frac{1}{\sin(KR)} \frac{2M_{c'}}{M_c K_b} + \frac{1}{K_n} \right|$$

Nous voyons sur cette dernière expression que l'approximation de BORN est d'autant plus valable que l'énergie cinétique relative des particules dans la voie de sortie est plus grande. En se souvenant que cette énergie cinétique relative des particules de la voie de sortie est reliée à l'énergie cinétique des particules dans la voie d'entrée (dans le système du laboratoire) par une relation du type :

$$K_b^2 = a \left[ b E_a (\text{labo}) + Q \right]$$

où a et b sont des constantes positives.

Nous constatons :

1) que pour une réaction donnée (Q fixe) l'approximation de BORN

est d'autant meilleure que la réaction a lieu à énergie élevée.

- 2) qu'à une énergie donnée, elle est d'autant meilleure que la réaction est plus exoénergétique.

Dans le cas de l'approximation de BUTLER, nous avons toujours :

$${}_2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \text{Cste} \frac{M_\alpha}{h^2} V_{00}^\alpha \left\{ \mathcal{R}_{00} + i \mathcal{J}_{00} \right\}$$

mais cette fois

$$\mathcal{R}_{00} = \frac{1}{K_n} \int_{R_0}^{\infty} \frac{\sin \left[ \frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc} \right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc}} \exp(-K_n r_{nc}) \cos(K_\alpha r_{nc}) dr_{nc}.$$

$$\mathcal{J}_{00} = \frac{1}{K_n} \int_{R_0}^{\infty} \frac{\sin \left[ \frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc} \right]}{\frac{M_c}{M_{c'}} K_b r_{nc}} \exp(-K_n r_{nc}) \sin(K_\alpha r_{nc}) dr_{nc}$$

En majorant les intégrales il vient :

$$\mathcal{R}_{00} \leq \frac{\exp(-K_n R_0)}{K_n^2}$$

$$\mathcal{J}_{00} \leq \frac{\exp(-K_n R_0)}{K_n^2}$$

ce qui entraîne :

$$|{}_2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}| \leq \sqrt{2} \text{Cste} \frac{M_\alpha}{h^2} V_{00}^\alpha \frac{\exp(-K_n R_0)}{K_n^2}$$

Les remarques faites précédemment s'appliquent évidemment de la même manière à ce cas.

Au début de ce chapitre, l'arbitraire du choix d'un potentiel de contact pour décrire l'interaction deuton-noyau nous est apparu, mais nous avons pourtant cherché à voir quelle était, alors, l'influence du deuxième terme sur les courbes de distribution angulaire. Une autre difficulté apparaîtra cependant lorsqu'il s'agira de déterminer le coefficient  $V_{00}$ . Ce paramètre, en effet, (homogène à une énergie que divise le cube d'une longueur) ne représente pas une quantité physique et il y a aussi arbitraire sur le choix de sa valeur.

Pour lui attribuer néanmoins un ordre de grandeur, nous utiliserons le résultat obtenu à la fin du chapitre précédent, c'est à dire la relation approchée entre le coefficient  $V_{00}$  d'un puits de portée nulle à la profondeur  $V_{0E}$  d'un potentiel exponentiel. (formule IV-23)

Admettant cette relation, il nous sera plus aisé de vérifier la vraisemblance des valeurs attribuées à  $V_{00}$ .

Les calculs ont été effectués dans le cadre de l'approximation de BUTLER pour différents rayons de stripping. ( $R_0 = 5,7 \text{ fm}$  et  $R_0 = 6 \text{ fm}$ ) Les résultats de l'intégration des intégrales radiales  $\mathcal{R}_{00}$  et  $\mathcal{I}_{00}$  sont donnés tableau 4. A partir de là, il a été facile de déduire les courbes de distribution angulaire.

En effet :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2M_d M_p}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{\kappa_p}{\kappa_d} \sum_i C_i |T|^2$$

$$T = iT + \mathcal{I}T$$

| R   | $\mathcal{R}_{00}$      | $\mathcal{I}_{00}$     |
|-----|-------------------------|------------------------|
| 5,7 | $-0.400 \cdot 10^{-28}$ | $0.810 \cdot 10^{-28}$ |
| 6   | $-0.380 \cdot 10^{-28}$ | $0.590 \cdot 10^{-28}$ |

Tableau 4

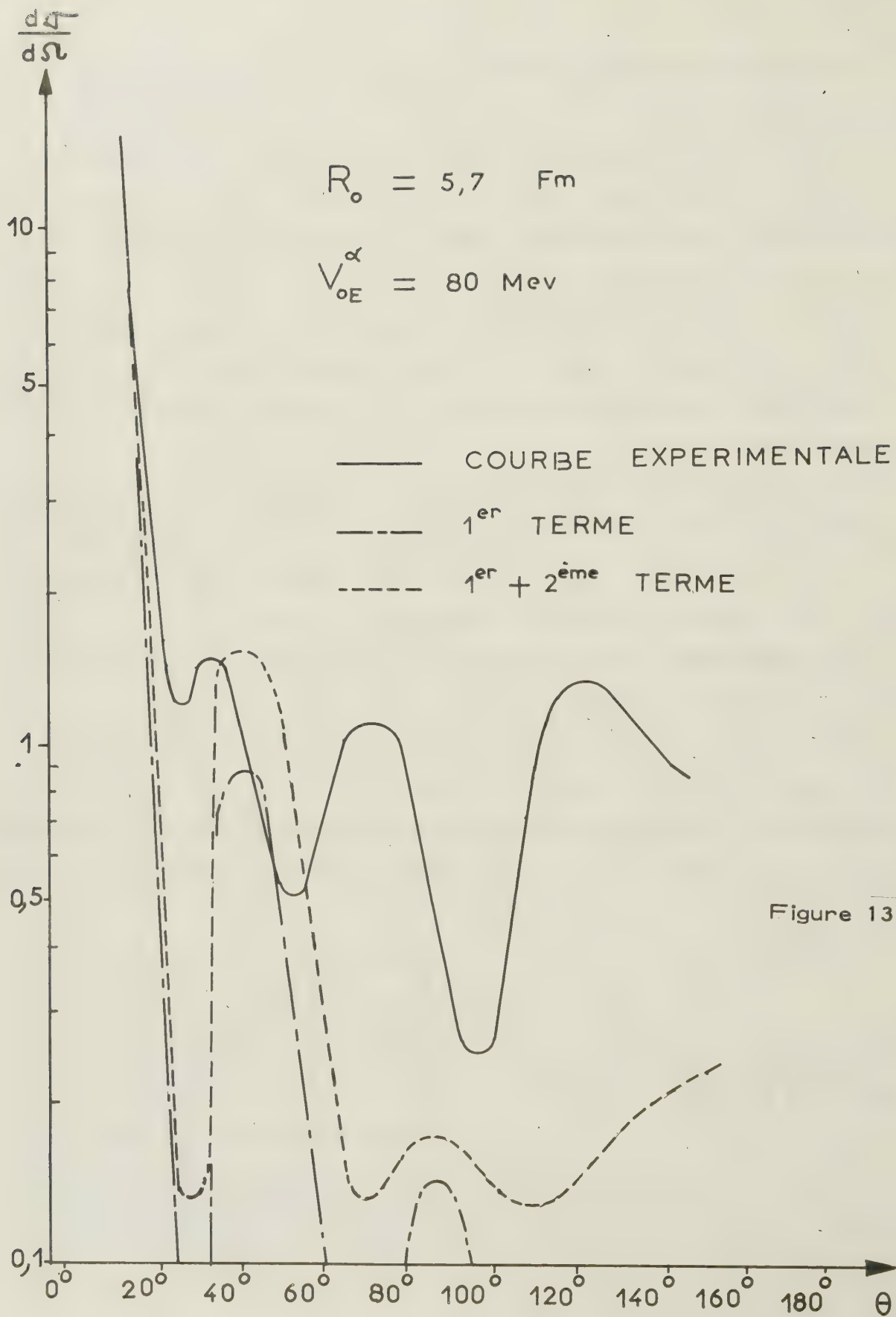
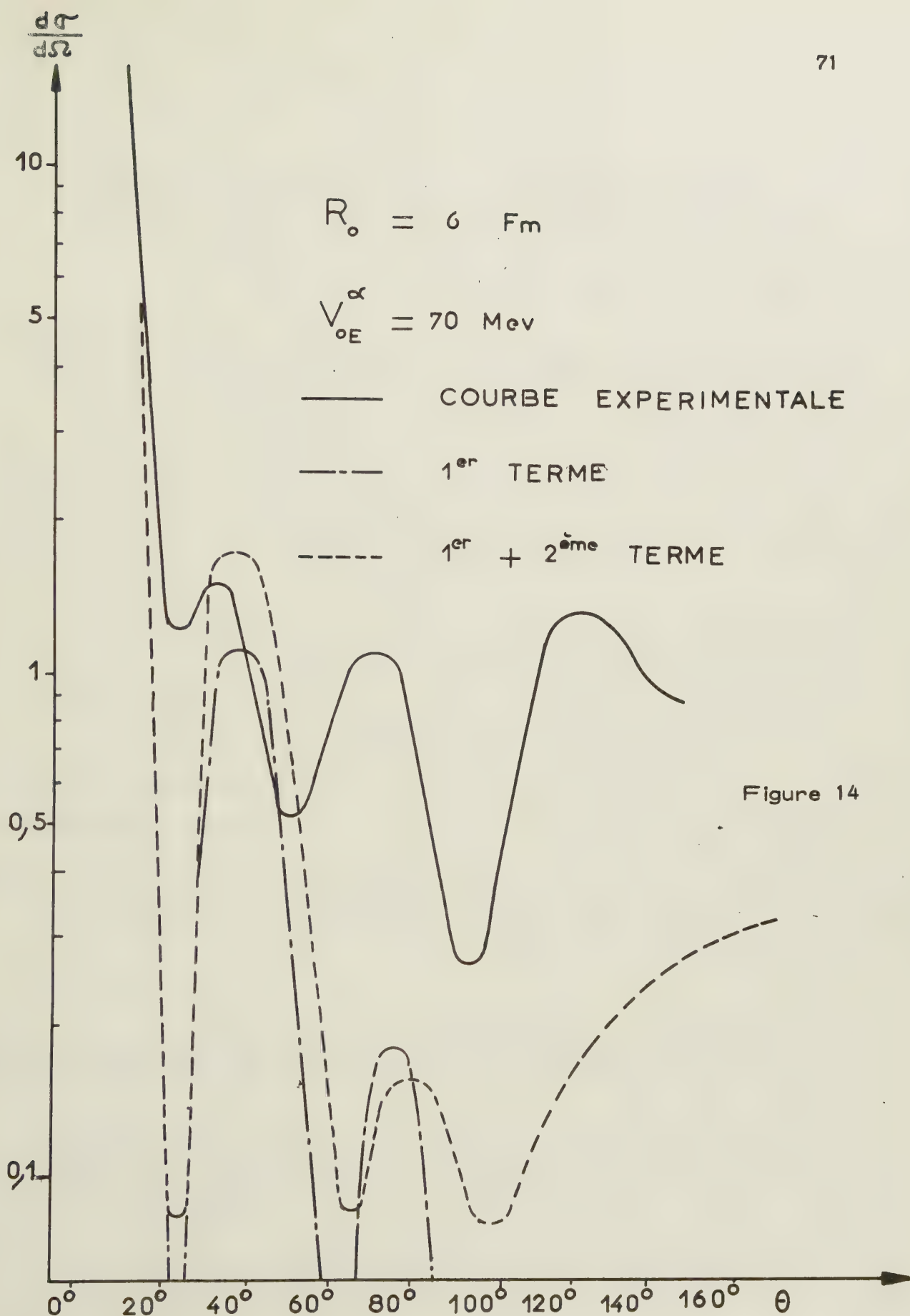


Figure 13



$$T = \text{Cste} \left\{ \frac{\exp(-\kappa_n P)}{\kappa_n} \mathcal{B}_{00} + \frac{M_\alpha}{\hbar^2} V_{0\delta}^\alpha (\mathcal{R}_{00} + i \mathcal{I}_{00}) \right\}$$

et par conséquent

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = C \left[ \left[ \frac{\exp(-\kappa_n P)}{\kappa_n} \mathcal{B}_{00} + \frac{M_\alpha}{\hbar^2} V_{0\delta}^\alpha \mathcal{R}_{00} \right]^2 + \left[ \frac{M_\alpha}{\hbar^2} V_{0\delta}^\alpha \mathcal{I}_{00} \right]^2 \right]$$

expression dans laquelle C est une nouvelle constante.

Les courbes obtenues sont données figures 13 et 14 où on a porté non pas  $V_{0\delta}^\alpha$  mais sa valeur correspondante  $V_{0E}^\alpha$

2 - Calcul de  $2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}$  avec  $V_\beta = -V_{0\delta}^\beta \delta(|\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc}|)$

$$V_\alpha = -V_{0\gamma}^\alpha \frac{\exp(-\mu_\alpha r_{dc})}{\mu_\alpha r_{dc}}$$

Nous reprenons le travail précédent en choisissant maintenant un potentiel de YUKAWA pour décrire l'interaction dans la voie d'entrée. Nous conserverons cette fois  $\vec{r}_{dc}$  et  $\vec{r}_{nc}$  comme variables indépendantes.

Dans ces conditions :

$$C_{\ell_n m_n}^{\ell_m} = V_{0\gamma}^\alpha V_{0\delta}^\beta \int \exp \left[ i \left( \frac{M_d}{M_p} - \frac{M_c}{M_{c'}} \right) \vec{k}_b \cdot \vec{r}_{nc} \right] \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \exp \left[ -i \frac{M_d}{M_p} \vec{k}_b \cdot \vec{r}_{dc} \right]$$

$$\delta \left[ |\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc}| \right] \psi_{\ell_m}^d \left[ \frac{M_d}{M_p} (\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc}) \right] \frac{\exp \left[ i \kappa_a |\vec{r}_{dc} - \vec{r}'_{dc}| \right]}{|\vec{r}_{dc} - \vec{r}'_{dc}|}$$

$$\frac{\exp(-\mu_\alpha r'_{dc})}{\mu_\alpha r'_{dc}} \exp(i \vec{k}_a \cdot \vec{r}'_{dc}) d\vec{r}_{dc} d\vec{r}'_{dc} d\vec{r}_{nc}$$

Intégrons sur  $\vec{r}_{dc}$

$$C_{\ell_n m_n}^{\ell m} = \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} \frac{1}{2} \psi_{\ell m}^d(0) \int \exp\left[-i \frac{M_c}{M_{c'}} \vec{k}_b \cdot \vec{r}_{nc}\right] \psi_{\ell_n m_n}^{n*}(\vec{r}_{nc}) \frac{\exp(i k_2 |\vec{r}_{nc} - \vec{r}'_{dc}|)}{|\vec{r}_{nc} - \vec{r}'_{dc}|} \frac{\exp(-\mu_\alpha r'_{dc})}{\mu_\alpha r'_{dc}} \exp(i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}'_{dc}) d\vec{r}_{nc} d\vec{r}'_{dc}$$

L'intégrale portant sur  $\vec{r}'_{dc}$  a pour expression :

$$I = \int \frac{\exp(i k_2 |\vec{r}_{nc} - \vec{r}'_{dc}|)}{|\vec{r}_{nc} - \vec{r}'_{dc}|} \frac{\exp(-\mu_\alpha r'_{dc})}{\mu_\alpha r'_{dc}} \exp(i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}'_{dc}) d\vec{r}'_{dc}$$

c'est à dire encore en développant sur les harmoniques sphériques l'onde plane et la fonction

$$I = (4\pi)^2 k_2 \int \sum_{\substack{LM \\ \ell m}} j_\ell(k_\alpha r_c) h_\ell^+(k_\alpha r_c) y_{\ell m}(\Omega_{r_{nc}}) y_{\ell m}^*(\Omega_{r'_{dc}}) \frac{\exp(-\mu_\alpha r'_{dc})}{\mu_\alpha r'_{dc}} i^L j_L(k_\alpha r'_{dc}) y_{LM}^*(\Omega_{k_2}) y_{LM}(\Omega_{r'_{dc}}) r_{dc}'^2 dr'_{dc} d\Omega_{r'_{dc}}$$

Intégrons en deux étapes :

$$I = (4\pi)^2 k_2 \sum_{\substack{LM \\ \ell m}} i^L y_{LM}^*(\Omega_{k_2}) y_{\ell m}(\Omega_{r_{nc}}) \frac{1}{\mu_\alpha} \int y_{\ell m}^*(\Omega_{r'_{dc}}) y_{LM}(\Omega_{r'_{dc}}) d\Omega_{r'_{dc}} \left\{ h_\ell^+(k_\alpha r_{nc}) \int_0^{r_{nc}} j_\ell(k_\alpha r'_{dc}) \exp(-\mu_\alpha r'_{dc}) j_L(k_\alpha r'_{dc}) r'_{dc} dr'_{dc} \right. \\ \left. j_\ell(k_\alpha r_{nc}) \int_{r_{nc}}^\infty h_\ell^+(k_\alpha r'_{dc}) \exp(-\mu_\alpha r'_{dc}) j_L(k_\alpha r'_{dc}) r'_{dc} dr'_{dc} \right\}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$I = (4\pi)^2 \frac{\kappa_a}{\mu_a} \sum_{LM} i^L Y_{LM}(\Omega_{\kappa_a}) Y_{LM}(\Omega_{r_{nc}}) \{ i_1(r_{nc}) + i_2(r_{nc}) \}$$

$$i_1(r_{nc}) = h_L^+(\kappa_a r_{nc}) \int_0^{r_{nc}} j_L^2(\kappa_a r'_{dc}) \exp(-\mu_a r'_{dc}) r'_{dc} dr'_{dc}$$

$$i_2(r_{nc}) = j_L(\kappa_a r_{nc}) \int_{r_{nc}}^{\infty} j_L(\kappa_a r'_{dc}) \exp(-\mu_a r'_{dc}) h_L^+(\kappa_a r'_{dc}) r'_{dc} dr'_{dc}$$

Considérons maintenant l'intégrale sur  $r_{nc}$

$$C_{\ell_n m_n}^{\ell_m} = (4\pi)^2 \frac{\kappa_a}{\mu_a} \frac{V_{0\gamma}^d}{V_{0\delta}^p} \frac{1}{2} \psi_{\ell_m}^d(0) 4\pi \sum_{\substack{LM \\ L'M'}} i^L (-i)^{L'} Y_{LM}(\Omega_{\kappa_b}) Y_{LM}(\Omega_{\kappa_a}) \int Y_{L'M'}^*(\Omega_{r_{nc}}) Y_{\ell_n m_n}(\Omega_{r_{nc}}) Y_{LM}(\Omega_{r_{nc}}) d\Omega_{r_{nc}} \\ \int j_{L'}\left(\frac{\mu_c}{\mu_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right) \psi_{\ell_n}^{n*}(r_{nc}) \{ i_1(r_{nc}) + i_2(r_{nc}) \} r_{nc}^2 dr_{nc}$$

Faisons  $\ell = \ell_n = 0$  et posons  $\Theta = (\vec{\kappa}_a, \vec{\kappa}_b)$

$$C_{00}^{00} = 4\pi \frac{\kappa_a}{\mu_a} \frac{V_{0\gamma}^d}{V_{0\delta}^p} \frac{1}{2} \psi_{00}^d(0) \sqrt{4\pi} \sum_L (2L+1) P_L(\cos \Theta) \\ \left\{ \int j_L\left(\frac{\mu_c}{\mu_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right) \psi_0^{n*}(r_{nc}) i_1(r_{nc}) r_{nc}^2 dr_{nc} \right. \\ \left. + \int j_L\left(\frac{\mu_c}{\mu_{c'}} \kappa_b r_{nc}\right) \psi_0^{n*}(r_{nc}) i_2(r_{nc}) r_{nc}^2 dr_{nc} \right\}$$

En prenant pour  $\psi_0^n(r_{nc})$  les fonctions du puits rectangulaire, et en séparant partie réelle et partie imaginaire, nous avons obtenu l'expression suivante :

$$C_{oo}^{oo} = -2\pi \frac{K_a}{K_n} V_{oy}^{\alpha} V_{os}^{\beta} \psi_{oo}(0) \sqrt{4\pi} \frac{A}{\mu_{\alpha}} \sum_L (2L+1) P_L(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ K \frac{e^{-K_n R}}{\sin KR} \int_0^R \left[ j_L\left(\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right) j_0(K r_{nc}) n_L(K_a r_{nc}) \int_0^{r_{nc}} j_L^2(K_a r_{dc}') e^{-\mu_{\alpha} r_{dc}'} r_{dc}' dr_{dc}' \right] r_{nc}^2 dr_{nc} \right. \\ & + K \frac{e^{-K_n R}}{\sin KR} \int_0^R \left[ j_L\left(\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right) j_0(K r_{nc}) j_L(K_a r_{nc}) \int_{r_{nc}}^{\infty} j_L(K_a r_{dc}') e^{-\mu_{\alpha} r_{dc}'} n_L(K_a r_{dc}') r_{dc}' dr_{dc}' \right] r_{nc}^2 dr_{nc} \\ & + \int_R^{\infty} \left[ j_L\left(\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right) e^{-K_n r_{nc}} n_L(K_a r_{nc}) \int_0^{r_{nc}} j_L^2(K_a r_{dc}') e^{-\mu_{\alpha} r_{dc}'} r_{dc}' dr_{dc}' \right] r_{nc} dr_{nc} \\ & + \int_R^{\infty} j_L\left(\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right) e^{-K_n r_{nc}} j_L(K_a r_{nc}) \int_{r_{nc}}^{\infty} j_L(K_a r_{dc}') e^{-\mu_{\alpha} r_{dc}'} n_L(K_a r_{dc}') r_{dc}' dr_{dc}' \right] r_{nc} dr_{nc} \\ & + i \frac{e^{-K_n R}}{\sin KR} K \int_0^R j_L\left(\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right) j_0(K r_{nc}) j_L(K_a r_{nc}) r_{nc}^2 dr_{nc} \int_0^{\infty} j_L^2(K_a r_{dc}') e^{-\mu_{\alpha} r_{dc}'} r_{dc}' dr_{dc}' \\ & \left. + i \int_R^{\infty} j_L\left(\frac{M_c}{M_c'} K_b r_{nc}\right) e^{-K_n r_{nc}} j_L(K_a r_{nc}) r_{nc} dr_{nc} \int_0^{\infty} j_L^2(K_a r_{dc}') e^{-\mu_{\alpha} r_{dc}'} r_{dc}' dr_{dc}' \right\} \end{aligned}$$

Reprenons l'expression de  $1T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2}$  que nous avons obtenue avec un potentiel d'interaction de la forme :

$$V_{\beta} = -V_{0\beta} \int \delta \left[ |\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc}| \right]$$

$$\begin{aligned} 1T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_i C_i \frac{1}{2} V_{0\beta} \psi_0^d(0) \sqrt{4\pi} A \frac{\exp(-K_n P)}{K_n} \mathcal{B}_{00} \\ &= \text{Cste} \frac{\exp(-K_n P)}{K_n} \mathcal{B}_{00} \end{aligned}$$

Avec les mêmes notations le deuxième terme s'écrit :

$$2T_{\alpha I_1 \rightarrow \beta I_2} = \text{Cste} \left\{ \frac{M_{\alpha}}{\hbar^2} 2 \frac{K_{\alpha}}{K_n \rho_{\alpha}} V_{0\gamma}^{\alpha} \right\} \sum_i (2L+1) U_L P_L(\cos \theta)$$

où  $U_L$  représente la quantité que nous avons écrite entre crochets dans l'expression de la page précédente. Le développement analytique mené par les méthodes classiques nous a donc conduit à une formule très lourde mais dont l'exploitation numérique ne rencontre pas de difficulté particulière. Tous les calculs ont été faits en supposant que les termes de la série d'ordre supérieur à  $L = 2$  ont une contribution négligeable. Cette hypothèse semble d'ailleurs approximativement confirmée par les résultats que nous avons obtenus en prenant  $V_0 = 40 \text{ MeV}$  c'est à dire  $K = 1,2 \text{ Fm}^{-1}$  et  $R = 4,25 \text{ Fm}$

$$U_0 = (2,33 - i 4,42) 10^{-54}$$

$$3 U_1 = (0,990 + i 1,02) 10^{-54}$$

$$5 U_2 = (0,145 + i 0,60) 10^{-54}$$

Reportant ces valeurs dans l'expression de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  nous obtenons pour les sections efficaces différentielles les courbes des figures 15 et 16.

Dans le cas de l'approximation de BUTLER, la quantité  $U_L$  se simplifie légèrement puisque toutes les intégrales sur l'intervalle  $[0, R_0]$  disparaissent. Nous avons effectué les calculs pour différents couples des paramètres  $\mu_\alpha$  et  $R_0$  (tableau 5) et chaque fois nous avons tracé la courbe de distribution angulaire correspondante en choisissant la valeur optimale de  $V_{0\gamma}^\alpha$  (figures 17 à 23).

Il est à noter que les valeurs de  $V_{0\gamma}^\alpha$  obtenues sont en bon accord avec les potentiels d'interaction de GAMMEL THALER.

D'autre part, on constate (et cela est vrai aussi pour un puits delta) que le second terme n'apporte qu'une contribution négligeable aux faibles angles ( $< 30^\circ$ ) ce qui montre que l'approximation de BUTLER-BORN est suffisante dans ce domaine. Par contre, aux grands angles, le premier terme ne joue pratiquement aucun rôle et il n'est plus justifié de négliger l'influence du second. On remarque également qu'un effet important est d'éliminer les zéros du terme principal.

Figure 15

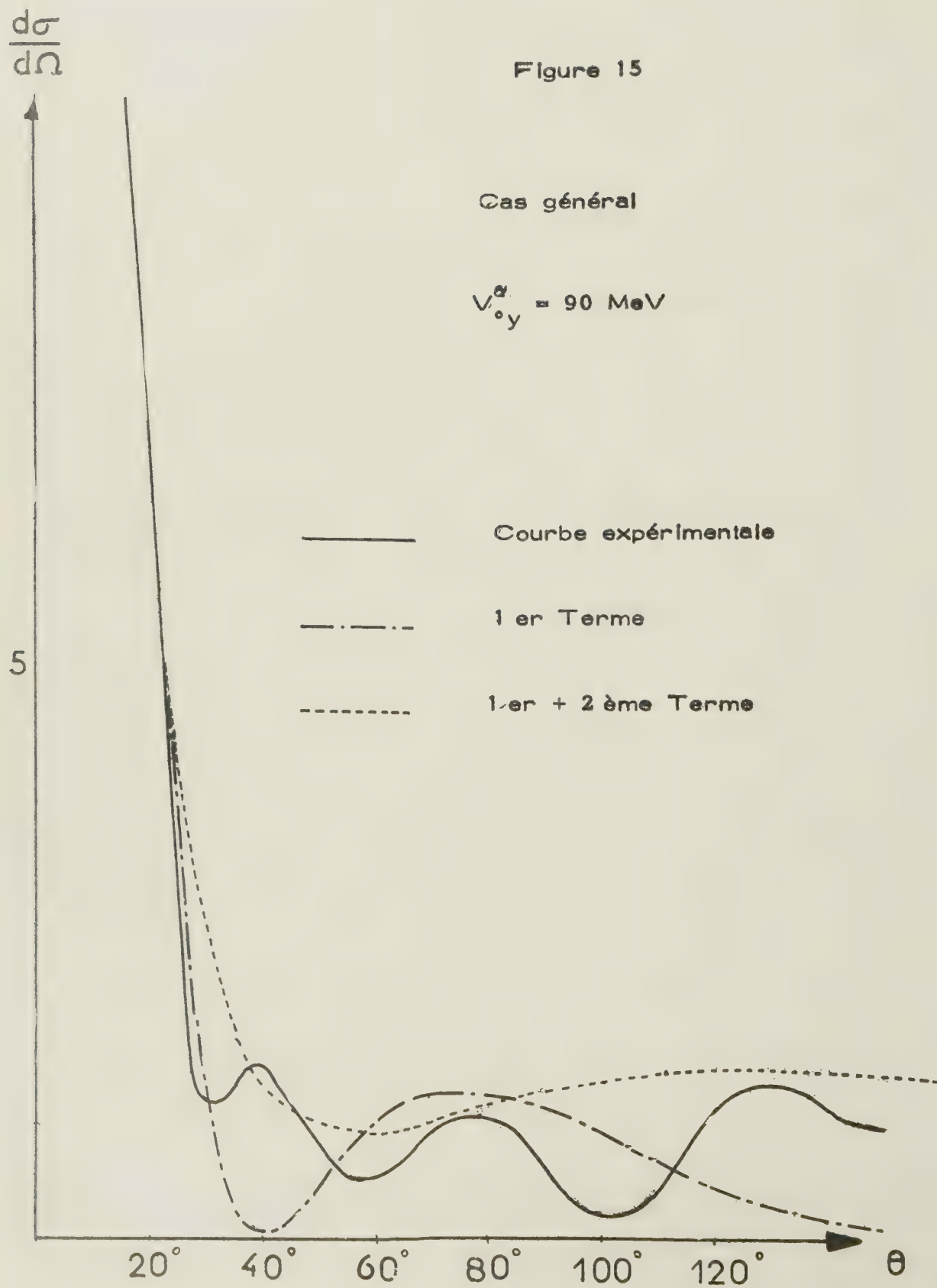
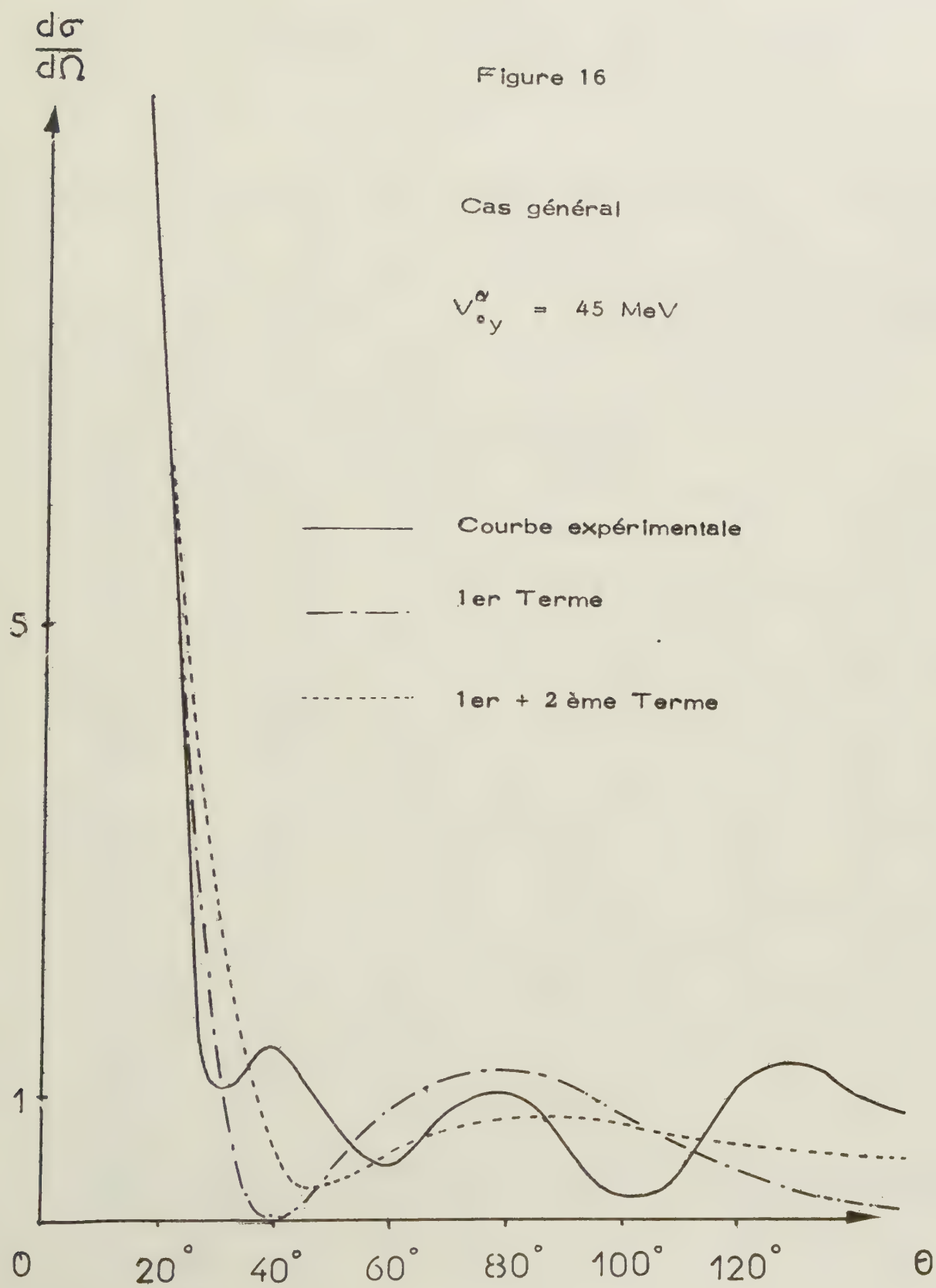


Figure 16

Cas général

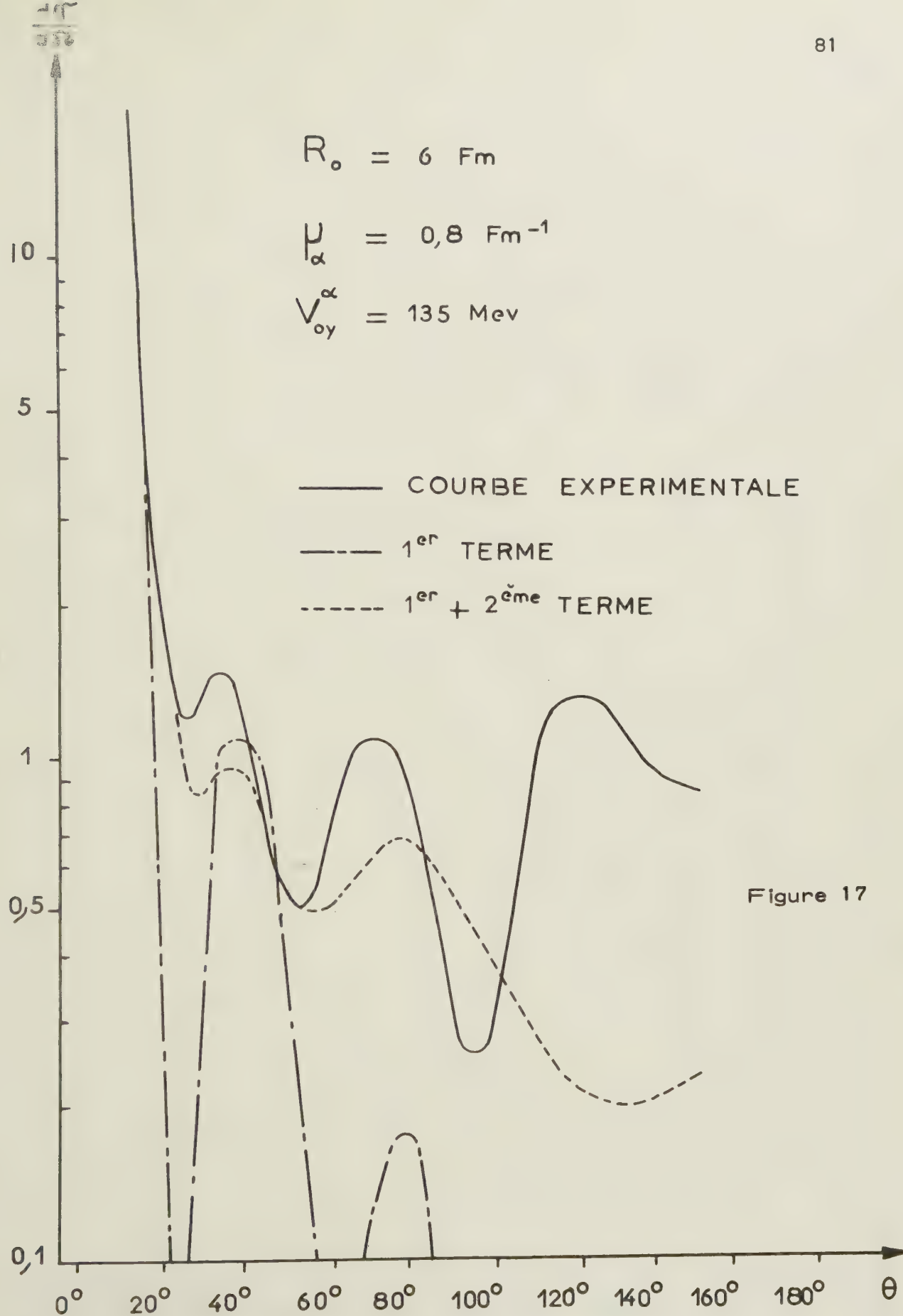
$$V_{\alpha y}^{\alpha} = 45 \text{ MeV}$$

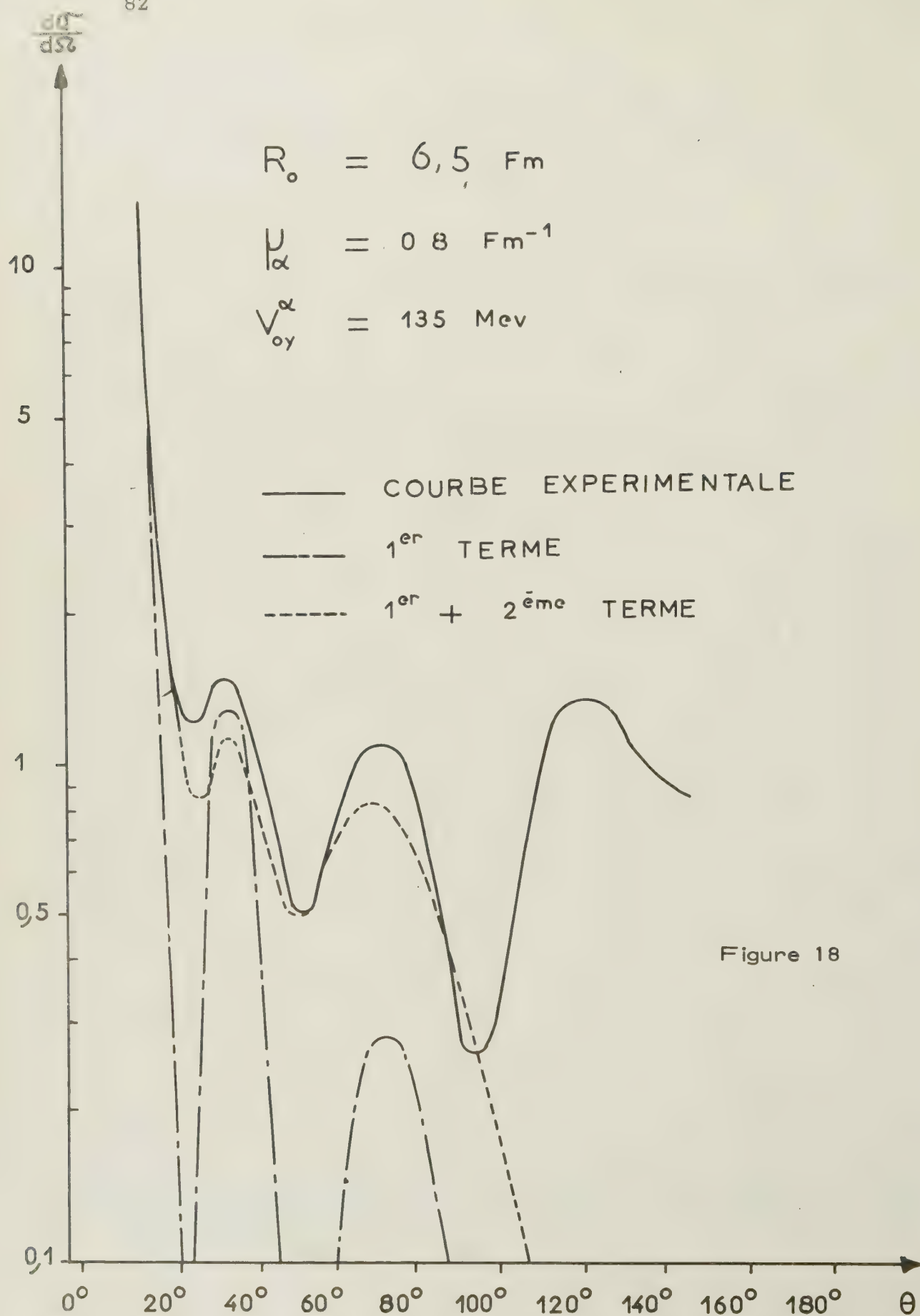


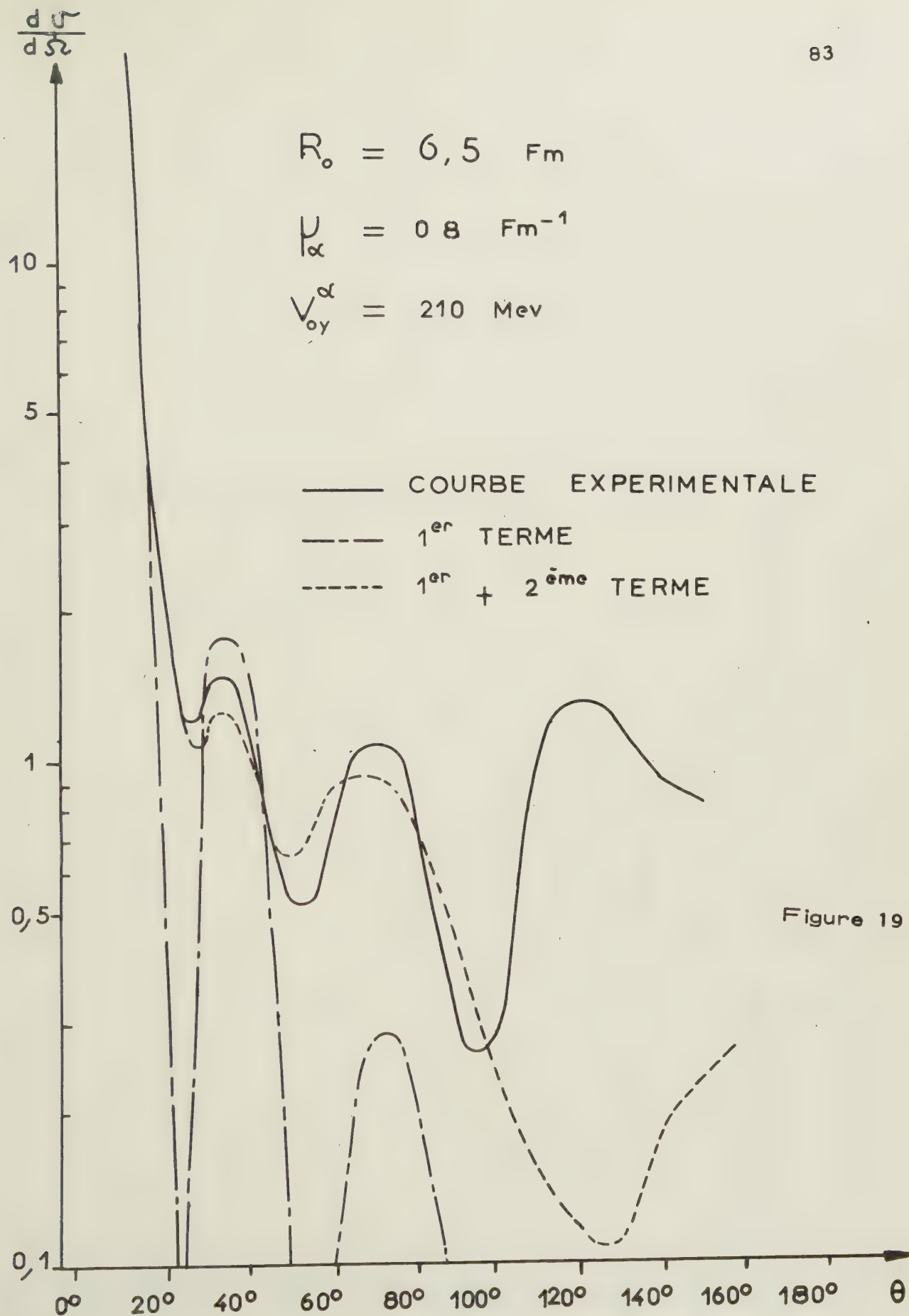
## TABLEAU 5

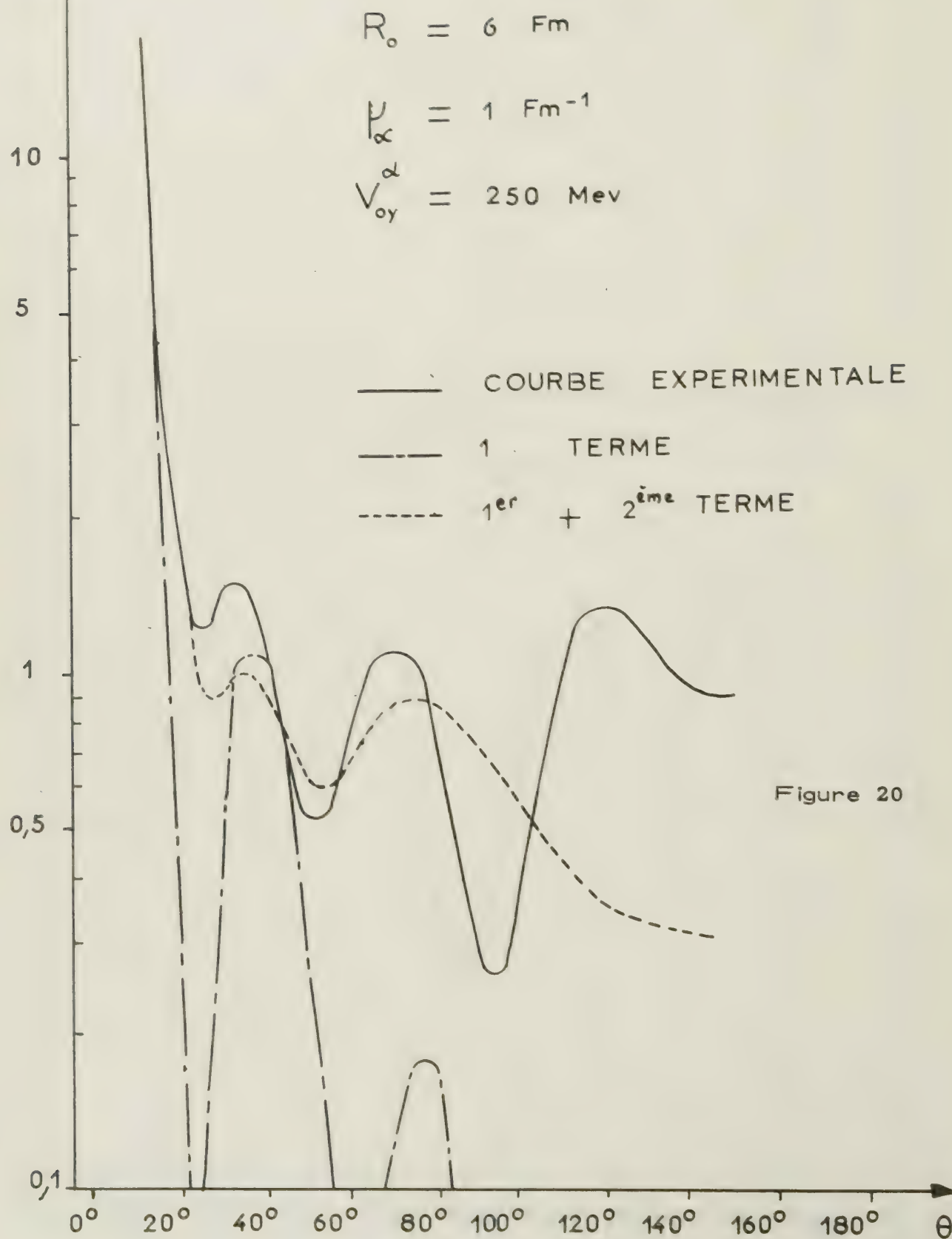
FACTEUR MULTIPLICATIF :  $10^{-54}$ 

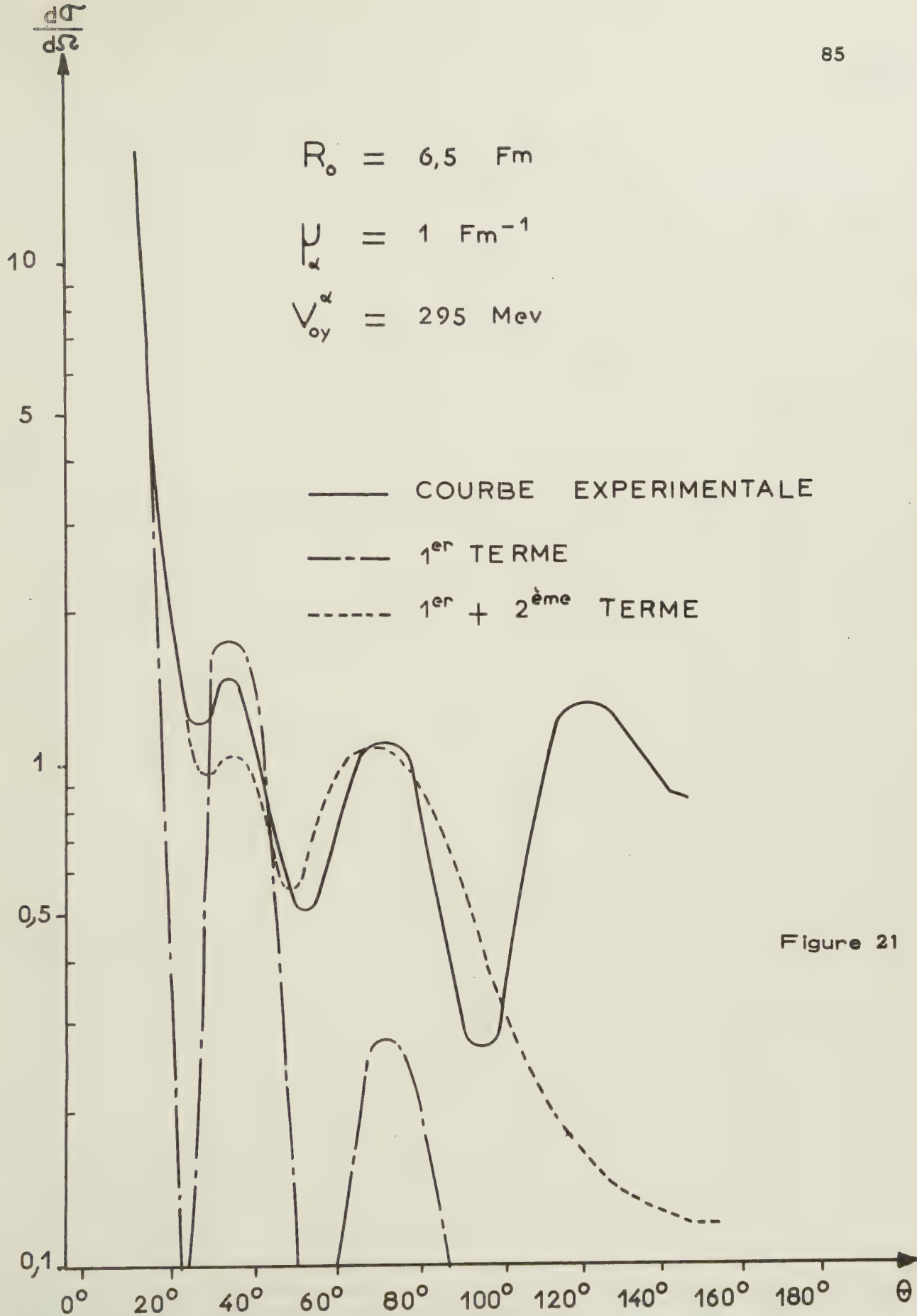
| $\frac{\mu}{k}$<br>fermi <sup>-1</sup> | R<br>(fermi) | L | $R(u_L)$ | $J(u_L)$ | $(2L+1) u_L$        |
|----------------------------------------|--------------|---|----------|----------|---------------------|
| 0,8                                    | 6            | 0 | 0,1740   | 0,2160   | 0,1740 + i 0,2160   |
|                                        |              | 1 | -0,0126  | 0,0633   | -0,0380 + i 0,1900  |
|                                        |              | 2 | 0,0117   | 0,0117   | 0,0585 + i 0,0585   |
|                                        | 6,5          | 0 | 0,1200   | 0,0960   | 0,1000 + i 0,0960   |
|                                        |              | 1 | -0,0031  | 0,0601   | -0,0095 + i 0,1805  |
|                                        |              | 2 | 0 0039   | 0,0050   | 0,0195 + i 0,0253   |
| 1                                      | 6            | 0 | 0,1392   | 0,1728   | 0,1392 + i 0,1728   |
|                                        |              | 1 | -0,00905 | 0 0369   | -0 0271 + i 0,1107  |
|                                        |              | 2 | 0,00624  | 0,00576  | 0,0312 + i 0,0288   |
|                                        | 6,5          | 0 | 0,0960   | 0,0768   | 0,0960 + i 0,0768   |
|                                        |              | 1 | -0,0020  | 0,03542  | -0,0060 + i 0,1062  |
|                                        |              | 2 | 0,0020   | 0,0025   | 0 0100 + i 0,01250  |
| 1,2                                    | 6,5          | 0 | 0,0760   | 0,0608   | 0,0760 + i 0,0608   |
|                                        |              | 1 | -0,00132 | 0,0239   | -0,00398 + i 0,0717 |
|                                        |              | 2 | 0,00109  | 0,00142  | 0,00548 + i 0,0071  |

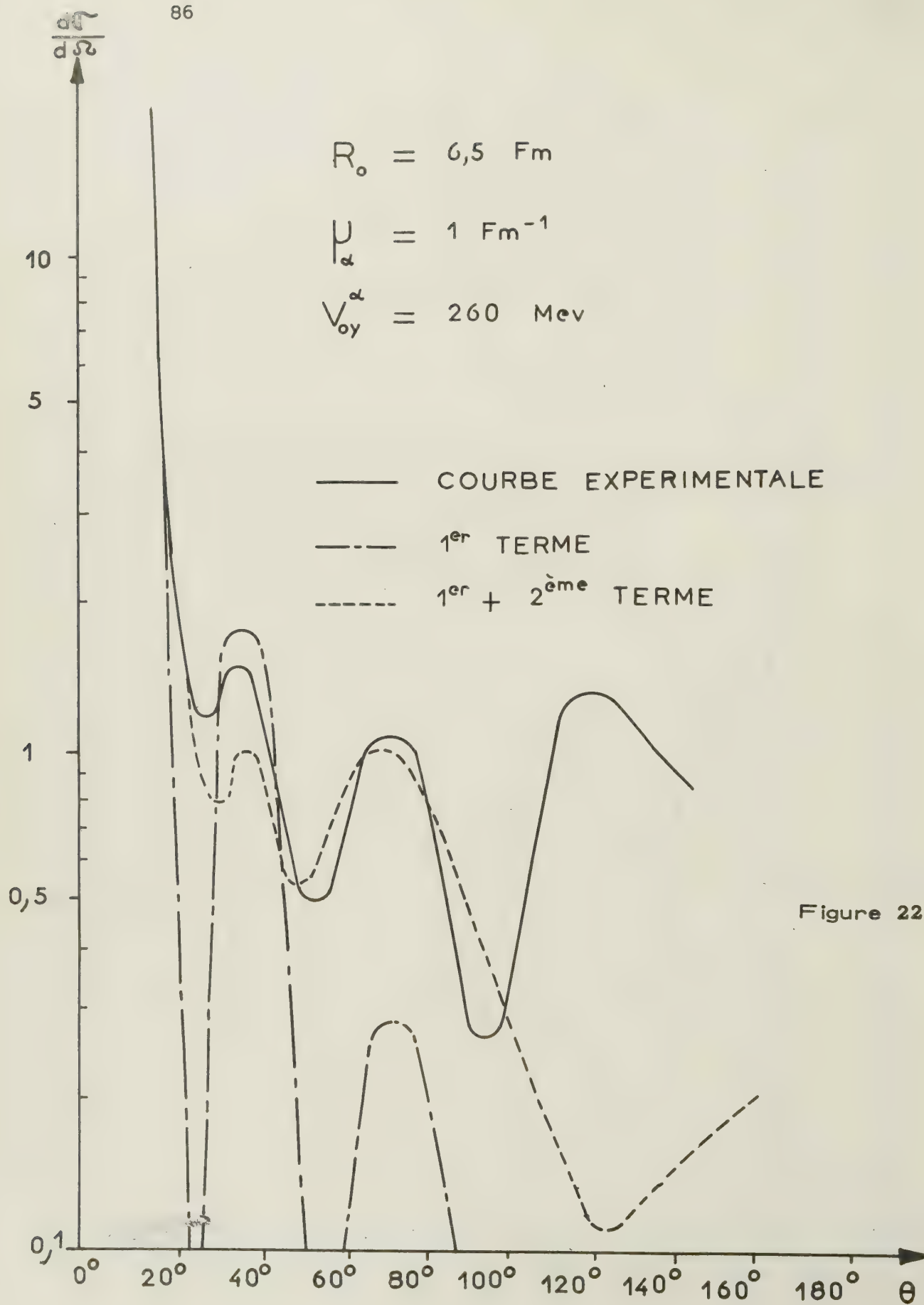


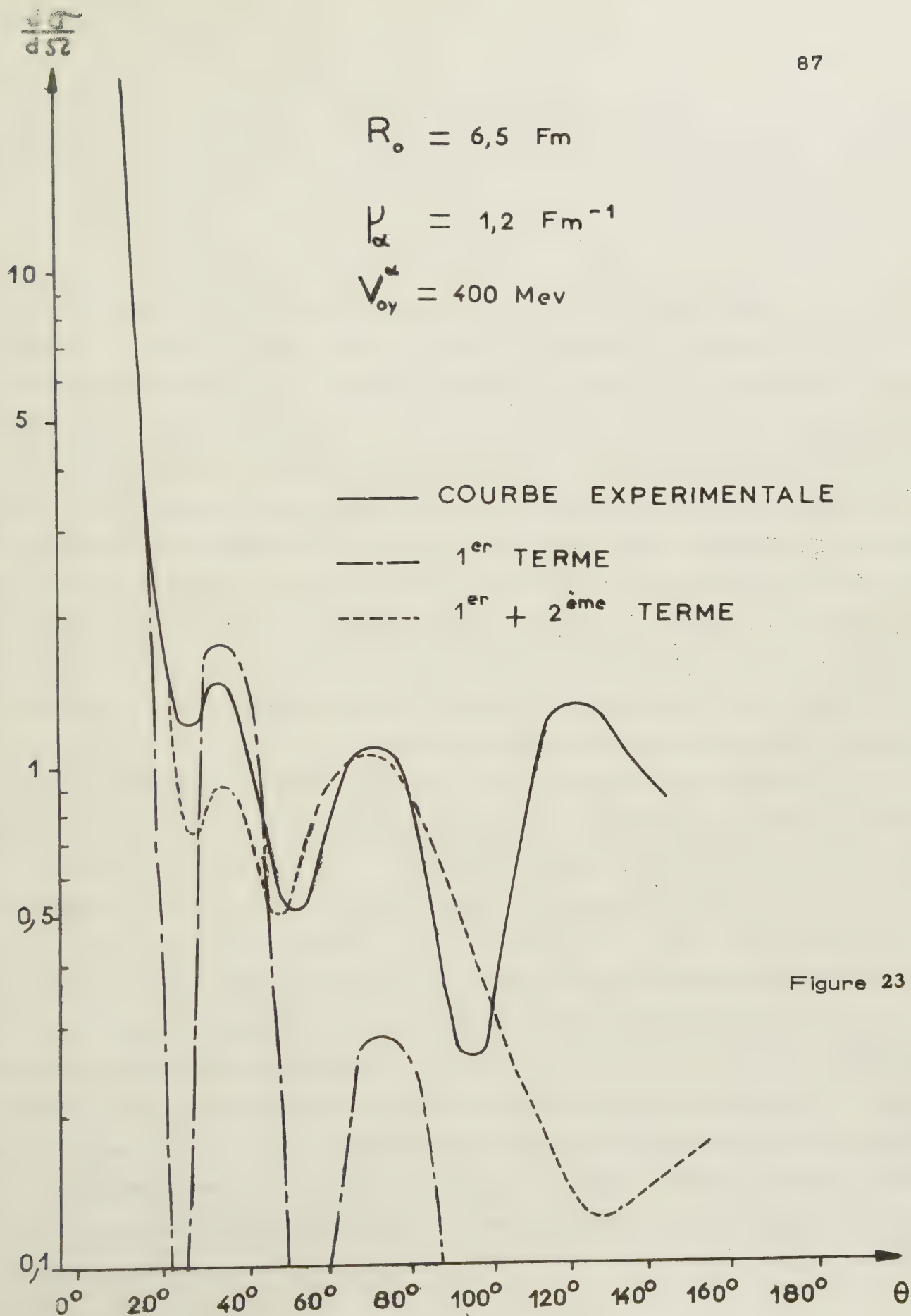










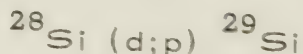


## CONCLUSION

---

Les différentes théories utilisées pour décrire une réaction nucléaire par un processus d'interaction directe évoluent dans le cadre de l'approximation de Born et nous savons qu'elles donnent des résultats satisfaisants, (par exemple une théorie aussi peu élaborée que celle de Butler permet de retrouver à la fois le pic à l'avant et l'allure générale des courbes de distribution angulaire). Elles laissent donc supposer que les termes successifs de la série de Born sont d'un ordre de grandeur inférieur au premier. Nous avons alors pensé à vérifier ce point particulier de la théorie sur un cas simple, où nous disposions de résultats expérimentaux en essayant d'introduire un petit nombre de paramètres seulement. En aucun cas nous n'avons voulu résoudre le problème général ou même généraliser les conclusions que nous avons pu tirer de notre étude.

Au début de ce travail, donc, nous nous étions proposé un but bien précis. Il s'agissait d'étudier l'ordre de grandeur du deuxième terme de la série de Born dans le cas de la réaction



ainsi que son influence sur les courbes de distribution angulaire.

Indépendamment de toute considération mathématique, très tôt il nous est apparu que cette étude se heurterait à des problèmes inhérents au manque de connaissance que nous avons des forces nucléaires et de l'évolution d'un système de nucléons au cours d'une réaction. Nous avons pallié à cet état de fait par toute une série d'hypothèses simplificatrices. Certaines d'entre elles trouvent leur justification dans la conception que nous avons à l'heure actuelle des phénomènes nucléaires. (forces de courte portée, modèles

nucléaires, processus d'interactions ...). D'autres, au contraire échappent totalement à de telles considérations et n'ont pour seul soutien que des raisons de simplicité (approximation sur les potentiels, ondes planes ...). Enfin, quelques unes ont puisé leur validité dans une concordance acceptable avec certains résultats obtenus par ailleurs : nous pensons tout spécialement ici au choix du paramètre traduisant la profondeur du puits dans la voie d'entrée.

Les résultats que nous avons donnés permettent de faire certaines remarques. D'abord on constate que l'approximation de Butler (ou approximation d'interaction de surface) donne, aussi bien au premier ordre qu'au second des résultats bien meilleurs que le calcul général. Cela semblerait donc indiquer la validité de cette hypothèse, mais pourrait encore signifier que les fonctions d'onde choisies ne sont pas aptes à traduire les mouvements internes des nucléons. Dans cet ordre d'idée on peut penser que les fonctions d'onde du puits carré pourraient avantageusement être remplacées par celles du puits gaussien ou par celles de l'oscillateur harmonique.

D'autre part, nous avons retrouvé un résultat que les travaux effectués avec l'approximation au premier ordre laissaient entrevoir. On voit, en effet, que le second terme n'apporte qu'une contribution négligeable aux faibles angles ( $< 30^\circ$ ) ce qui montre que l'approximation de Born est suffisante dans ce domaine. Par contre, aux grands angles, il apparaît que la contribution du deuxième terme n'est pas négligeable bien qu'insuffisante pour retrouver les remontées vers l'arrière des courbes expérimentales.

On remarque également qu'un des effets est d'éliminer les zéros du terme principal. Pourtant nous ne pensons pas qu'il s'agisse là d'un fait essentiel, car il est sûr que ces zéros sont dus aux ondes planes choisies pour décrire le mouvement relatif et que par conséquent toute autre fonction suffirait à les éliminer. C'est bien ce qui a lieu lorsqu'on utilise la méthode D.W.B.A. Signalons encore qu'un même résultat pourrait éventuelle-

ment être obtenu, même avec des ondes planes, si nous utilisions des paquets d'ondes comme l'implique, à priori, l'étude de l'amplitude de transition.

Tous ces résultats ont été obtenus à l'aide de différentes approximations (approximation des ondes planes, approximation sur les potentiels..) et par conséquent il apparaît que des améliorations à notre travail pourraient être effectuées en revenant sur ces différentes approches.

Une première étape pourrait être franchie en tenant compte des effets coulombiens. Peut être pourrait-on alors espérer obtenir les remontées vers l'arrière que notre théorie n'a jamais pu mettre en évidence. Une deuxième tentative pourrait encore consister à refaire les mêmes calculs mais cette fois dans le cadre de la méthode D.W.B.A. qui, nous le savons, est une théorie bien plus évoluée que celle de Butler.

De toute façon il faut bien voir que la difficulté prépondérante dans cette étude réside essentiellement dans le choix simultané des potentiels  $V_\alpha$  et  $V_\beta$  responsables de l'interaction. Un tel choix impose une connaissance approfondie de l'évolution d'un système de nucléons en interaction. Pour le moment donc, par manque d'information il faudra baser la détermination de ces potentiels uniquement sur des critères de cohérence. Initialement nous avions espéré effectuer ce travail en calculant, au premier ordre l'amplitude de transition d'abord en interaction finale, puis en interaction initiale. Les couples de potentiels  $V_\alpha$  et  $V_\beta$  donnant les meilleurs accords théoriques et expérimentaux auraient pu alors être considérés comme cohérents. Malheureusement nous ne savons pas si les développements ont un comportement et une convergence semblables et nous avons dû abandonner cette idée. Dans la méthode que nous avons utilisée nous avons choisi à priori les potentiels, nous avons ensuite comparé les résultats avec ceux de la littérature. C'est ainsi que nous avons pu vérifier, pour un potentiel de Yukawa dans la voie d'entrée, le bon accord de nos valeurs avec celles de Gammel-Thaler.

Enfin, il faut signaler que notre étude pourrait permettre de calculer les termes suivants sans introduire de nouvelles hypothèses et de nouveaux paramètres, et par conséquent sans nouvelle difficulté théorique majeure. Pourtant il faut remarquer que les difficultés d'exploitation numérique interdisent toute tentative dans cette voie, d'autant que l'étude au second ordre ne justifiait pas la nécessité de calculer d'autres termes de la série de Born.

BIBLIOGRAPHIE

---

- 1 B. LIPPMANN et J. SCHWINGER  
Phys. Rev. 79, 469 (1949)  
J. LAFOUCRIERE et E. EL-BAZ  
C.R.A.S. t. 257, p. 115-117
- 2 E. EL-BAZ  
Thèse Doctorat es-Sciences
- 3 ROBSON D.  
Nucl. Phys., 22, 34 (1961)
- 4 H.E. GOVE  
Proceeding of the Rutherford jubilee international conference p.437  
J.B. BIRKS, London (1961)
- 5 W. KOHN  
Reviews of modern physics, 26, n° 3, 292 (1954)
- 6 R. JOST et A. PAIS  
Phys. Rev. 82, n° 6, 840 (1951)
- 7 H. DAVIES  
Nucl. Phys., 14, 465 (1959/60)
- 8 J.E. RUSSEL  
Nucl. Phys., 38, 553 (1962)
- 9 MESSIAH A.  
Traité de mécanique quantique, Dunod, Paris (1960)
- 10 SUNAKAWA S.  
Progress of theoretical Phys., 24, n° 5 (1960)
- 11 KUEHNER J.A. et BROMLEY D.A.  
Nucl. Phys., 21, 555 (1960)

- 12 RODBERG L.S.  
Phys. Rev., 123, n° 3, 1051 (1961)
- 13 R.G. SACHS  
Nuclear Theory, Addison-Wesley publishing company Inc.  
Cambridge USA (1955)
- 14 TOBOCMAN W.  
Theory of direct nuclear reactions, Oxford university Press (1961)
- 15 E.N. MARTIN  
Tables numériques de physique nucléaire, Gauthier-Villars, Paris  
(1954)
- 16 C.C. GROSJEAN  
Formal theory of scattering phenomena, institut interuniversitaire des  
Sciences nucléaires, monographie n°7.
- 17 K.M. WATSON  
Phys.Rev., 105 1388 (1957)  
Rev. Mod. Phys., 30, 565 (1958)



# TABLE DES MATIERES

|                                                                                                                                                                                                                        | Pages |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| INTRODUCTION .....                                                                                                                                                                                                     | 1     |
| <u>CHAPITRE I - L'amplitude de transition</u> .....                                                                                                                                                                    | 5     |
| <u>CHAPITRE II - Etude du premier terme</u> .....                                                                                                                                                                      | 14    |
| <u>CHAPITRE III - Etude du deuxième terme</u> .....                                                                                                                                                                    | 27    |
| <u>CHAPITRE IV- Calcul du premier terme pour la réaction</u><br>$^{28}\text{Si} (d,p) ^{29}\text{Si}$ à l'état fondamental .....                                                                                       | 37    |
| 1 - Calcul de $F_{00}$ avec $V_{\beta} = -V_{0\beta}^{\beta} \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^{\beta}}$ .....                                                                                                              | 52    |
| 2 - Calcul de $F$ avec $V_{\beta}(r_{pn}) = -V_{0\beta}^{\beta} \exp(-\mu_{\beta} r_{pn})$ ...                                                                                                                         | 53    |
| 3 - Retour au potentiel $\delta$ .....                                                                                                                                                                                 | 59    |
| <u>CHAPITRE V - Calcul du deuxième terme-Etude de son influence</u><br>dans le cas de la réaction $^{28}\text{Si} (d,p) ^{29}\text{Si}$ pour<br>l'état fondamental .....                                               | 61    |
| 1 - Calcul de $^2T_{\alpha I. \rightarrow \beta I_2}$ avec $V_{\beta} = -V_{0\beta}^{\beta} \frac{\delta(r_{pn})}{r_{pn}^{\beta}}$ ; $V_{\alpha} = -V_{0\alpha}^{\alpha} \frac{\delta(r_{dc})}{r_{dc}^{\alpha}}$ ..... | 62    |
| 2 - Calcul de $^2T_{\alpha I. \rightarrow \beta I_2}$ avec $V_{\beta} = -V_{0\beta}^{\beta} \delta[(\vec{r}_{dc} - \vec{r}_{nc})]$ .....                                                                               | 72    |
| et $V_{\alpha} = -V_{0\alpha}^{\alpha} \frac{\exp(-\mu_{\alpha} r_{dc})}{\mu_{\alpha} r_{dc}}$                                                                                                                         |       |
| CONCLUSION .....                                                                                                                                                                                                       | 88    |
| BIBLIOGRAPHIE .....                                                                                                                                                                                                    | 92    |



Vu :

Les Membres du Jury :

A. SARAZIN

J. LAFOUCRIERE

E. EL-BAZ

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer

Lyon, le 26 Septembre 1964

Le Recteur

Président du Conseil de l'Université

P. LOUIS









